При этом значении C_1 из общего интеграла получаем искомый частный интеграл, удовлетворяющий заданному начальному условию, $y=-2\cos x$.

2) Умножая на $\frac{\sec^2 t}{s}dt$, разделяем переменные $\sec^2 t\,dt = \frac{\ln s}{s}ds$ и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int d(\operatorname{tg} t)=\int \ln s\, d\ln s + C; \quad \operatorname{tg} t=\frac{1}{2}\ln^2 s + C.$$

Подставляя начальные значения $t=\pi$, $s=1$, определяем значение C:

$$\operatorname{tg}\pi=\frac{1}{2}\ln 1 + C; \quad C=0.$$

Следовательно, искомый частный интеграл $\ln^2 s-2\operatorname{tg} t=0$.

Решить следующие дифференциальные уравнения (найти их общие интегралы):

1068. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$. **1069.** $yy'+x=1$.

1070. $\sin\alpha\cos\beta\, d\alpha=\cos\alpha\sin\beta\, d\beta$. **1071.** $1+(1+y')e^y=0$.

1072. $3e^x\sin y\,dx=(e^x-1)\sec y\,dy$. **1073*.** $x^2(2yy'-1)=1$.

Найти частные интегралы следующих уравнений при указанных начальных условиях:

1074. $y^2+x^2y'=0$; $y(-1)=1$. **1075.** $2(1+e^x)yy'=e^x$; $y(0)=0$. **1076.** $(1+x^2)y^3dx-(y^2-1)x^3dy=0$; $y(1)=-1$.

§ 3. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $y'=f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, а следовательно, и решается посредством замены функции y (или x) новой функцией u по формуле $y=ux$ (или $x=uy$).

1077. Проинтегрировать следующие уравнения:

1) $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$; 2) $y-xy'=y\ln\frac{x}{y}$;

3) $x\,dy-y\,dx=y\,dy$ при условии $y(-1)=1$.

Решение. 1) Разрешая данное уравнение относительно производной

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

устанавливаем, что она является функцией только отношения переменных $\frac{y}{x}$, т. е. устанавливаем, что данное уравнение является однородным.

Далее вводим новую функцию u, полагая $y=ux$, при этом $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u} \quad \text{или} \quad x\,du=\frac{1-u^2}{2u}\,dx.$$

Разделим переменные: $\frac{2u\,du}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем

$$-\ln|1-u^2|=\ln|x|-\ln C \text{ или } x(1-u^2)=\pm C=C_1.$$

Исключая вспомогательную функцию u $\left(u=\frac{y}{x}\right)$, окончательно получим $y^2=x^2-C_1x$.

2) Вначале устанавливаем, что данное уравнение — однородное:

$$y'=\frac{y}{x}\left(1-\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

затем заменяем функцию y. Полагая $y=ux$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u+x\frac{du}{dx}=u(1+\ln u) \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=u\ln u.$$

Умножая обе его части на $\frac{dx}{xu\ln u}$, разделим переменные

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\int\frac{d(\ln u)}{\ln u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C; \quad \ln|\ln u|=\ln|x|+\ln C.$$

Потенцируя и исключая вспомогательную переменную u, найдем искомый общий интеграл $|\ln u|=C|x|$; $u=e^{c_1x}$; $y=xe^{c_1x}$.

3) Выяснив, что уравнение однородное:

$$y'=\frac{y}{x-y}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

и полагая $y=ux$, получим уравнение

$$u+xu'=\frac{u}{1-u} \text{ или } x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C$$

или

$$\frac{1}{u}+\ln|xu|=C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общий интеграл

$$x=y(C-\ln|y|).$$

Подставив заданные значения переменных: $y=1$ при $x=-1$, находим, что $C=-1$.

Следовательно, искомый частный интеграл уравнения будет

$$x=-y(1+\ln|y|).$$

Решить следующие уравнения:

1078. $y-xy'=x+yy'$. **1079.** $y\,dy+(x-2y)\,dx=0$.

1080. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$. **1081.** $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$.

1082. $(y^2-3x^2)\,dy+2xy\,dx=0$, при условии $y(1)=-2$.

1083*. $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$ при условии $y(1)=\pi$.

§ 4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ известные функции от x, линейное (первой степени) относительно функции y и ее производной y' называется линейным.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y=uv$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение Бернулли $y'+P(x)y=y^nQ(x)$, отличающееся от линейного уравнения тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y, решается так же, как и линейное. Посредством подстановки $y=uv$ оно также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

1084. Решить уравнения:

1) $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$; 2) $x^2y^2y'+xy^3=1$;

3) $y\,dx-(3x+1+\ln y)\,dy=0$ при условии $y\left(-\frac{1}{3}\right)=1$.