и полагая $y=ux$, получим уравнение

$$u+xu'=\frac{u}{1-u} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C$$

или

$$\frac{1}{u}+\ln|xu|=C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общий интеграл

$$x=y(C-\ln|y|).$$

Подставив заданные значения переменных: $y=1$ при $x=-1$, находим, что $C=-1$.

Следовательно, искомый частный интеграл уравнения будет

$$x=-y(1+\ln|y|).$$

Решить следующие уравнения:

1078. $y-xy'=x+yy'$.

1079. $y\,dy+(x-2y)\,dx=0$.

1080. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$.

1081. $y=x\,(y'-\sqrt[x]{e^y})$.

1082. $(y^2-3x^2)\,dy+2xy\,dx=0$, при условии $y(1)=-2$.

1083*. $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$ при условии $y(1)=\pi$.

§ 4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ известные функции от x, линейное (первой степени) относительно функции y и ее производной y' называется линейным.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y=uv$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение Бернулли $y'+P(x)y=y^nQ(x)$, отличающееся от линейного уравнения тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y, решается так же, как и линейное. Посредством подстановки $y=uv$ оно также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

1084. Решить уравнения:

1) $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$;

2) $x^2y^2y'+xy^3=1$;

3) $y\,dx-(3x+1+\ln y)\,dy=0$ при условии $y\left(-\frac{1}{3}\right)=1$.

Решение: 1) Убедившись, что данное уравнение линейное полагаем $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$u'v+v'u-uv\operatorname{ctg}x=\sin x \text{ или } u'v+u(v'-v\operatorname{ctg}x)=\sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно взять произвольно, то выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v'-v\operatorname{ctg}x=0$.

Тогда для отыскания u получим уравнение $u'v=\sin x$.

Решая первое из этих уравнений, найдем v; разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v}=\operatorname{ctg}x\,dx;\ \ln v=\ln\sin x;\ v=\sin x.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем как общий интеграл этого уравнения:

$$u'\sin x=\sin x;\ du=dx;\ u=x+C.$$

Зная u и v, находим искомую функцию y:

$$y=uv=(x+C)\sin x.$$

2) Разделив обе части уравнения на x^2y^2:

$$y'+\frac{y}{x}=y^{-2}\cdot\frac{1}{x^2},$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли, где $P=x^{-1}$, $Q=x^{-2}$.

Заменяя функцию y по формуле $y=uv$, имеем $y'=u'v+v'u$,

$$u'v+v'u+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2u^2v^2}$$

или

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Отсюда, как и в решении предыдущей задачи, получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1)\ v'+\frac{v}{x}=0 \text{ и } 2)\ u'v=\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения:

$$\frac{dv}{v}+\frac{dx}{x}=0;\ \ln v+\ln x=0;\ vx=1;\ v=\frac{1}{x}.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{u'}{x}=\frac{1}{u^2};\ u^2du=x\,dx;\ \frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{3};\ u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}.$$

Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения

$$y=uv=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}.$$

3) Преобразовав данное уравнение к виду

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3x}{y}=\frac{1+\ln y}{y} \text{ или } \frac{dx}{dy}+P(y)\,x=Q(y),$$

выясняем, что оно является линейным, если рассматривать x как функцию от y.

Далее, заменяя функцию x по формуле $x=uv$, где u и v функции от y, имеем $\frac{dx}{dy}=v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}$ и

$$v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}-\frac{3uv}{y}=\frac{1+\ln y}{y}$$

или

$$v\frac{du}{dy}+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{3v}{y}\right)=\frac{1+\ln y}{y}.$$

Отсюда для нахождения u и v имеем два уравнения:

$$1)\ \frac{dv}{dy}-\frac{3v}{y}=0 \text{ и } 2)\ v\frac{du}{dy}=\frac{1+\ln y}{y}.$$

Из первого уравнения находим v:

$$\frac{dv}{v}=\frac{3\,dy}{y};\ \ln v=3\ln y;\ v=y^3.$$

Подставляем v во второе уравнение и, решая его, находим u:

$$y^3\frac{du}{dy}=\frac{1+\ln y}{y};\quad du=\frac{1+\ln y}{y^4}\,dy;$$

$$u=\int y^{-4}\,dy+\int y^{-4}\ln y\,dy+C=\frac{y^{-3}}{-3}+I+C.$$

Второй интеграл, обозначенный I, находим отдельно по формуле интегрирования по частям. Полагая $u_1=\ln y$, $dv_1=y^{-4}dy$, получим $du_1=\frac{dy}{y}$, $\quad v_1=\frac{y^{-3}}{-3}$ и

$$I=\int u_1\,dv_1=u_1v_1-\int v_1\,du_1=-\frac{\ln y}{3y^3}+\frac{1}{3}\int y^{-4}\,dy=$$

$$=-\frac{\ln y}{3y^3}-\frac{1}{9y^3}.$$

Следовательно, $u=-\frac{1}{3y^3}-\frac{\ln y}{3y^3}-\frac{1}{9y^3}+C.$

Умножая u на v, получим общий интеграл данного уравнения:

$$x=Cy^3-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\ln y.$$

Подставляя сюда заданные значения переменных $x=-\frac{1}{3}$, $y=1$, находим значение произвольной постоянной $C=\frac{1}{9}$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет

$$x=\frac{y^3-4}{9}-\frac{1}{3}\ln y.$$

Решить следующие уравнения:

1085. $y'-y=e^x$. **1086.** $(x^2+1)y'+4xy=3$.

1087. $\cos y\,dx=(x+2\cos y)\sin y\,dy$. **1088.** $y'+y=x\sqrt{y}$.

1089. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$ при условии $y(2)=0$.

1090*. $y\,dx+2x\,dy=2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$ при условии $y(0)=\pi$.

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах

Если в уравнении 1-го порядка $P\,dx+Q\,dy=0$ коэффициенты P и Q удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$*. Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Записав такое уравнение в виде $du=0$ и найдя первообразную функцию $u(x, y)$ по правилу, указанному в гл. VII, § 10, получим общий интеграл этого уравнения, полагая $u(x, y)=C$.

1091. Решить уравнения:

1) $(2y-3)\,dx+(2x+3y^2)\,dy=0$;

2) $(x+\ln|y|)\,dx+\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$.

Решение. 1) Вначале убеждаемся, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах:

$$P'_y=(2y-3)'_y=2;\quad Q'_x=(2x+3y^2)'_x=2;\quad P'_y=Q'_x.$$

Затем находим неопределенные интегралы:

$\int P\,dx=\int(2y-3)\,dx=2xy-3x+\varphi(y)$, считая y постоянной,

$\int Q\,dy=\int(2x+3y^2)\,dy=2xy+y^3+\psi(x)$, считая x постоянной.

Беря все известные члены из первого результата и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y, из второго результата, получим функцию $u(x, y)=2xy-3x+y^3$, полным дифференциалом которой является левая часть данного дифференциального уравнения, а приравняв ее произвольной постоянной, получим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$2xy-3x+y^3=C.$$

---

* См. гл. VII, § 8.