Подставляя сюда заданные значения переменных $x=-\frac{1}{3}$ $y=1$, находим значение произвольной постоянной $C=\frac{1}{9}$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет

$$x=\frac{y^3-4}{9}-\frac{1}{3}\ln y.$$

Решить следующие уравнения:

1085. $y'-y=e^x$. **1086.** $(x^2+1)y'+4xy=3$.

1087. $\cos y\,dx=(x+2\cos y)\sin y\,dy$. **1088.** $y'+y=x\sqrt{y}$.

1089. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$ при условии $y(2)=0$.

1090*. $y\,dx+2x\,dy=2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$ при условии $y(0)=\pi$.

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах

Если в уравнении 1-го порядка $P\,dx+Q\,dy=0$ коэффициенты P и Q удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$*. Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Записав такое уравнение в виде $du=0$ и найдя первообразную функцию $u(x, y)$ по правилу, указанному в гл. VII, § 10, получим общий интеграл этого уравнения, полагая $u(x, y)=C$.

1091. Решить уравнения:

1) $(2y-3)\,dx+(2x+3y^2)\,dy=0$;

2) $(x+\ln|y|)\,dx+\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$.

Решение. 1) Вначале убеждаемся, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах:

$$P'_y=(2y-3)'_y=2;\quad Q'_x=(2x+3y^2)'_x=2;\quad P'_y=Q'_x.$$

Затем находим неопределенные интегралы:

$\int P\,dx=\int(2y-3)\,dx=2xy-3x+\varphi(y)$, считая y постоянной,

$\int Q\,dy=\int(2x+3y^2)\,dy=2xy+y^3+\psi(x)$, считая x постоянной.

Беря все известные члены из первого результата и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y, из второго результата, получим функцию $u(x, y)=2xy-3x+y^3$, полным дифференциалом которой является левая часть данного дифференциального уравнения, а приравняв ее произвольной постоянной, получим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$2xy-3x+y^3=C.$$

* См. гл. VII, § 8.

2) Проверив, что в данном уравнении левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$(x+\ln|y|)'_y=\frac{1}{y}=\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)'_x,$$

затем находим эту функцию, интегрируя каждый ее частный дифференциал отдельно:

$$u=\int(x+\ln|y|)\,dx=\frac{x^2}{2}+x\ln|y|+\varphi(y);$$

$$u=\int\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=y+x\ln|y|-\cos y+\psi(x).$$

Далее составляем окончательное выражение функции u (дописываем к известным членам первого выражения недостающие члены, зависящие только от y, из второго выражения) и, приравняв его произвольной постоянной C, находим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{x^2}{2}+x\ln|y|+y-\cos y=C.$$

Проверить, что следующие уравнения 1-го порядка суть уравнения в полных дифференциалах и решить их.

1092. $(3x^2y^2+7)\,dx+2x^3y\,dy=0.$

1093. $(e^y+ye^x+3)\,dx=(2-xe^y-e^x)\,dy.$

1094. $\sin(x+y)\,dx+x\cos(x+y)\,(dx+dy)=0.$

1095. $(2x+ye^{xy})\,dx+(1+xe^{xy})\,dy=0$ при условии $y(0)=1.$

1096*. $\left(\frac{y^2+\sin 2x}{y}+1\right)dx-\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-x\right)dy=0.$

§ 6. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1) Уравнение n-го порядка $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием.

Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка: $y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1=\varphi_1(x)+C_1$.

Снова умножая обе части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-2)$-го порядка: $y^{(n-2)}=\int\varphi_1(x)\,dx+\int C_1\,dx+C_2=$ $=\varphi_2(x)+C_1x+C_2$ и т. д.

После n-кратного интегрирования получаем общий интеграл y этого уравнения в виде явной функции от x и n произвольных постоянных: $y=\varphi_n(x)+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n$.