2) Проверив, что в данном уравнении левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$(x+\ln|y|)'_y=\frac{1}{y}=\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)'_x,$$

затем находим эту функцию, интегрируя каждый ее частный дифференциал отдельно:

$$u=\int(x+\ln|y|)\,dx=\frac{x^2}{2}+x\ln|y|+\varphi(y);$$

$$u=\int\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=y+x\ln|y|-\cos y+\psi(x).$$

Далее составляем окончательное выражение функции u (дописываем к известным членам первого выражения недостающие члены, зависящие только от y, из второго выражения) и, приравняв его произвольной постоянной C, находим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{x^2}{2}+x\ln|y|+y-\cos y=C.$$

Проверить, что следующие уравнения 1-го порядка суть уравнения в полных дифференциалах и решить их.

1092. $(3x^2y^2+7)\,dx+2x^3y\,dy=0$.

1093. $(e^y+ye^x+3)\,dx=(2-xe^y-e^x)\,dy$.

1094. $\sin(x+y)\,dx+x\cos(x+y)\,(dx+dy)=0$.

1095. $(2x+ye^{xy})\,dx+(1+xe^{xy})\,dy=0$ при условии $y(0)=1$.

1096*. $\left(\frac{y^2+\sin 2x}{y}+1\right)dx-\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-x\right)dy=0$.

§ 6. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1) Уравнение n-го порядка $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием.

Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка: $y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1=\varphi_1(x)+C_1$.

Снова умножая обе части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-2)$-го порядка: $y^{(n-2)}=\int\varphi_1(x)\,dx+\int C_1\,dx+C_2=$ $=\varphi_2(x)+C_1x+C_2$ и т. д.

После n-кратного интегрирования получаем общий интеграл y этого уравнения в виде явной функции от x и n произвольных постоянных: $y=\varphi_n(x)+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n$.

2) Уравнения 2-го порядка: А) $f(x, y', y'')=0$ и Б) $F(y, y', y'')=0$, не содержащие явно функции y или аргумента x, преобразуются в уравнения 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$ $\left(\text{откуда } y''=\frac{dp}{dx}\text{—для уравнения А или } y''=p\frac{dp}{dy}\text{—для уравнения Б}\right)$.

1097. Решить уравнения:

1) $y'''=60x^2$. 2) $(x-3)y''+y'=0$.

3) $yy''-(y')^2=y^3$, если $y(0)=-\frac{1}{2}$, $y'(0)=0$.

Решение. 1) Умножая обе части данного уравнения 3-го порядка на dx и затем интегрируя, получаем уравнение 2-го порядка: $y'''\,dx=60x^2\,dx$; $y''=20x^3+C_1$.

Далее тем же способом получаем уравнение 1-го порядка и затем искомую функцию—общий интеграл данного уравнения:

$$y''\,dx=20x^3\,dx+C_1\,dx;\quad y'=5x^4+C_1x+C_2;$$

$$y'\,dx=(5x^4+C_1x+C_2)\,dx;\quad y=x^5+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2) Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно функции y. Полагая $y'=p$, получим $y''=\frac{dp}{dx}$ и после подстановки данное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$(x-3)\frac{dp}{dx}+p=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\frac{dp}{p}+\frac{dx}{x-3}=0$;

$\ln|p|+\ln|x-3|=\ln C$; $\quad |p(x-3)|=C$; $\quad p(x-3)=\pm C=C_1$.

Заменяя вспомогательную переменную p через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение $(x-3)\frac{dy}{dx}=C_1$, решая которое найдем искомый общий интеграл:

$$dy=\frac{C_1\,dx}{x-3};\quad y=C_1\ln|x-3|+C_2.$$

3) Это неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно аргумента x. Положим $y'=p$; тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$ и данное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка:

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^3\quad\text{или}\quad\frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=\frac{y^2}{p},$$

которое является уравнением Бернулли, если p рассматривать как функцию от y.

Заменяя функцию по формуле $p=uv$, имеем

$$u\frac{dv}{dy}+v\frac{du}{dy}-\frac{uv}{y}=\frac{y^2}{uv} \quad \text{или} \quad u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}\right)=\frac{y^2}{uv}.$$

Отсюда для нахождения u и v получим два уравнения:

$$\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=0 \quad \text{и} \quad u\frac{dv}{dy}=\frac{y^2}{uv}.$$

Из первого уравнения находим u, как его простейший частный интеграл:

$$\frac{du}{u}-\frac{dy}{y}=0; \quad \ln u=\ln y; \quad u=y.$$

Подставляя u во второе уравнение, находим v, как его общий интеграл:

$$y\frac{dv}{dy}=\frac{y^2}{yv}; \quad v\,dv=dy; \quad \frac{v^2}{2}=y+C_1; \quad v=\pm\sqrt{2(y+C_1)}.$$

Зная u и v, находим $p=uv=\pm y\sqrt{2(y+C_1)}$.

Заменяя p через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{2(y+C_1)}.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение целесообразно определить значение постоянной C_1, используя заданные значения $y=-\frac{1}{2}$, $y'=0$:

$$0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}+C_1\right)}; \quad C_1=\frac{1}{2}.$$

Подставляя значение C_1 в последнее уравнение, разделяя в нем переменные и интегрируя, найдем

$$\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=\pm dx; \quad \pm x+C_2=\int\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=I.$$

Для отыскания интеграла I полагаем $\sqrt{2y+1}=z$, тогда $2y+1=z^2$, $dy=z\,dz$,

$$I=2\int\frac{dz}{z^2-1}=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\ln\frac{|\sqrt{2y+1}-1|}{\sqrt{2y+1}+1}.$$

Следовательно,

$$C_2\pm x=\ln\frac{|1-\sqrt{2y+1}|}{1+\sqrt{2y+1}}.$$

Наконец, используя заданные значения $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, определяем значение постоянной $C_2=\ln|-1|=0$ и получаем искомый частный интеграл

$$x = \pm \ln \frac{|1-\sqrt{2y+1}|}{1+\sqrt{2y+1}}.$$

Как показано в решении этой задачи, *при отыскании частных интегралов уравнений высших порядков* (указанных типов) *нет необходимости сначала находить общий интеграл, а лишь затем определять значения всех постоянных.* Можно, и лучше, определять значение каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

Решить уравнения:

1098. $y''' = e^{2x}$. **1099.** $y'' = x \sin x$.

1100. $x(y''+1)+y'=0$. **1101.** $y''=\sqrt{1-(y')^2}$.

1102. $y''+ay=b$. **1103*.** $yy''-(y')^2=y^4$.

В задачах 1104—1106 найти частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям:

1104. $y''=3x^2$; $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

1105. $(y''x-y')y'=x^3$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

1106*. $2y(y')^3+y''=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-3$.

§ 7. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением называется уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \qquad (1)$$

все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$—известные функции от аргумента x или постоянные.

Общий интеграл линейного однородного уравнения n-го порядка (1) *имеет вид*

$$y = C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$—*линейно независимые частные интегралы этого уравнения.*

Если все коэффициенты p_i линейного однородного уравнения (1) постоянны, то его общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\ldots+p_{n-1}r+p_n=0, \qquad (2)$$

которое получается из этого уравнения, если сохраняя в нем все коэффициенты p_i, заменить функцию y единицей, а все ее производные соответствующими степенями r. При этом:

1) если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения (2) действительны и различны (однократны), то общий