частный интеграл

$$x = \pm \ln \frac{|1-\sqrt{2y+1}|}{1+\sqrt{2y+1}}.$$

Как показано в решении этой задачи, *при отыскании частных интегралов уравнений высших порядков* (указанных типов) *нет необходимости сначала находить общий интеграл, а лишь затем определять значения всех постоянных.* Можно, и лучше, определять значение каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

Решить уравнения:

1098. $y''' = e^{2x}$. **1099.** $y'' = x \sin x$.

1100. $x(y''+1)+y' = 0$. **1101.** $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$.

1102. $y''+ay = b$. **1103*.** $yy''-(y')^2 = y^4$.

В задачах 1104—1106 найти частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям:

1104. $y'' = 3x^2$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

1105. $(y''x-y')y' = x^3$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

1106*. $2y(y')^3+y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

§ 7. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением называется уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny = 0, \tag{1}$$

все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$—известные функции от аргумента x или постоянные.

Общий интеграл линейного однородного уравнения n-го порядка (1) *имеет вид*

$$y = C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$—*линейно независимые частные интегралы этого уравнения.*

Если все коэффициенты p_i линейного однородного уравнения (1) постоянны, то его общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\ldots+p_{n-1}r+p_n = 0, \tag{2}$$

которое получается из этого уравнения, если сохраняя в нем все коэффициенты p_i, заменить функцию y единицей, а все ее производные соответствующими степенями r. При этом:

1) если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения (2) действительны и различны (однократны), то общий

интеграл уравнения (1) выражается формулой

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx}; \qquad (3)$$

2) если характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексных сопряженных корней $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то в формуле (3) соответствующая пара членов заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x);$$

3) если действительный корень r_1 уравнения (2) имеет кратность k $(r_1=r_2=\ldots=r_k)$, то соответствующие k членов в формуле (3) заменяются слагаемым

$$e^{r_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1});$$

4) если пара комплексных сопряженных корней $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ уравнения (2) имеет кратность k, то соответствующие k пар членов в формуле (3) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+$$
$$+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x].$$

1107. Решить уравнения:

1) $y''-5y'-6y=0$; 2) $y'''-6y''+13y'=0$;

3) $\frac{d^2S}{dt^2}+4\frac{dS}{dt}+4S=0$; 4) $\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$;

5) $y^{(4)}+13y^{(2)}+36y=0$; 6) $y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)}=0$.

Решение. 1) Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями r, напишем его характеристическое уравнение: $r^2-5r-6=0$.

Корни этого уравнения $r_1=6$, $r_2=-1$ действительны и различны. Поэтому, согласно правилу 1, искомый общий интеграл данного уравнения будет $y=C_1e^{6x}+C_2e^{-x}$.

2) По указанному правилу составляем характеристическое уравнение: $r^3-6r^2+13r=0$. Оно имеет один действительный однократный корень $r_1=0$ и пару комплексных сопряженных корней $r_{2,3}=3\pm2i$. Согласно правилам 1 и 2 общий интеграл данного уравнения $y=C_1+e^{3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

3) Написав характеристическое уравнение $r^2+4r+4=0$, находим, что оно имеет равные действительные корни $r_1=r_2=-2$. Согласно правилу 3, общий интеграл данного уравнения $S=e^{-2t}(C_1+C_2t)$.

4) Характеристическое уравнение $r^4-1=0$ данного дифференциального уравнения $y^{(4)}-y=0$ имеет корни $r_1=-1$, $r_2=1$, $r_{3,4}=\pm i$. Поэтому, согласно правилам 1 и 2, искомый общий интеграл $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$.

5) Дифференциальному уравнению $y^{(4)}+13y^{(2)}+36y=0$ соответствует характеристическое уравнение $r^4+13r^2+36=0$ или

$(r^2+4)(r^2+9)=0$. Оно имеет две пары мнимых сопряженных корней $r_{1,2}=\pm 2i$, $r_{3,4}=\pm 3i$. Согласно правилу 2, общий интеграл данного уравнения $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3\cos 3x+$ $+C_4\sin 3x$.

6) Дифференциальному уравнению $y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)}=0$ соответствует характеристическое уравнение $r^7+2r^5+r^3=0$ или $r^3(r^2+1)^2=0$. Оно имеет трехкратный действительный корень $r=0\,(r_1=r_2=r_3=0)$ и пару двукратных мнимых сопряженных корней $r=\pm i\,(r_4=r_5=i,\ r_6=r_7=-i)$. Согласно правилам 3 и 4, общий интеграл этого уравнения $y=C_1+C_2x+C_3x^2+(C_4+$ $+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x$.

1108. Найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям:

1) $y''+4y'+5y=0;\quad y(0)=-3,\quad y'(0)=0$.

2) $y'''+3y''+3y'+y=0;\ y(0)=-1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$.

Решение. 1) Вначале находим общий интеграл данного уравнения. Его характеристическое уравнение $r^2+4r+5=0$ имеет корни $r_{1,2}=-2\pm i$. Поэтому, согласно правилу 2, общий интеграл $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Далее, используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя в общий интеграл заданные значения $x=0$, $y=-3$ (первое начальное условие), получим

$$-3=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0)\ \text{ или }\ -3=C_1.$$

Дифференцируя общий интеграл (как произведение)

$$y'=e^{-2x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x]$$

и подставляя в результат заданные значения $x=0$, $y'=0$ (второе начальное условие), получим второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2:

$$0=e^0[(C_2-2C_1)\cos 0-(C_1+2C_2)\sin 0]\ \text{ или }\ C_2-2C_1=0.$$

Решая полученные уравнения, как систему, найдем, $C_1=-3$, $C_2=-6$.

Подставляя значения C_1 и C_2 в общий интеграл, получим искомый частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий данным начальным условиям: $y=-3e^{-2x}(\cos x+2\sin x)$.

2) Характеристическое уравнение $r^3+3r^2+3r+1=0$ или $(r+1)^3=0$ данного дифференциального уравнения имеет трехкратный действительный корень $r=-1\,(r_1=r_2=r_3=-1)$. Согласно правилу 3, общий интеграл есть $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$.

Дважды дифференцируя его

$$y'=e^{-x}[C_2-C_1+(2C_3-C_2)x-C_3x^2];$$

$$y''=e^{-x}[C_1-2C_2+2C_3+(C_2-4C_3)x+C_3x^2]$$

и подставляя в выражения для y, y' и y'' заданные их значения при $x=0$, получим для определения постоянных C_1, C_2, C_3 систему из трех уравнений: $-1=C_1$; $2=C_2-C_1$; $3=C_1-2C_2+2C_3$, откуда найдем $C_1=-1$; $C_2=1$; $C_3=3$. Следовательно, искомый частный интеграл $y=e^{-x}(3x^2+x-1)$.

Решить уравнения:

1109. $y''-5y'+6y=0$.

1110. $y'''-4y''+3y'=0$.

1111. $\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+25\frac{dy}{dx}=0$.

1112. $\frac{d^3S}{dt^3}+5\frac{d^2S}{dt^2}=0$.

1113. $y'''-3y''+3y'-y=0$.

1114. $y^{(4)}-8y^{(2)}-9y=0$.

1115. $\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^2y}{dx^2}+25y=0$.

1116*. $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$.

1117. $y''-y=0$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

1118. $y''+2y'+2y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

1119*. $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+2a\frac{d\rho}{d\varphi}+a^2\rho=0$, если $\rho(0)=a$, $\rho'(0)=0$.

§ 8. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно функции и ее производных

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=q(x), \qquad (1)$$

отличающиеся от линейного однородного уравнения наличием в правой части некоторой известной функции q от независимой переменной x.

Общий интеграл y *линейного неоднородного уравнения равен сумме какого-либо его частного интеграла* y_1 *и общего интеграла* u *соответствующего однородного уравнения (получающегося из неоднородного при* $q=0$*).*

Согласно этому свойству, для решения линейного неоднородного уравнения (1) с постоянными коэффициентами p_i вначале находится функция u (по правилам § 7), затем функция y_1. Их сумма и дает общий интеграл y неоднородного уравнения: $y=u+y_1$.

Для некоторых специальных видов функции $q(x)$ частный интеграл y_1 можно найти методом неопределенных коэффициентов. По виду правой части $q(x)$ можно заранее указать вид частного интеграла y_1, где неизвестны лишь числовые коэффициенты, и затем найти его без всяких квадратур в следующих простейших случаях:

1) $q(x)=e^{mx}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен, *
2) $q(x)=e^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$,
3) $q(x)$ есть сумма указанных функций.

* В частности, если $m=0$, то $q(x)$ — многочлен, а если $P(x)$ есть постоянная c (многочлен нулевой степени), то $q(x)$ — показательная функция ce^{mx}.