и подставляя в выражения для y, y' и y'' заданные их значения при $x=0$, получим для определения постоянных C_1, C_2, C_3 систему из трех уравнений: $-1=C_1$; $2=C_2-C_1$; $3=C_1-2C_2+2C_3$, откуда найдем $C_1=-1$; $C_2=1$; $C_3=3$. Следовательно, искомый частный интеграл $y=e^{-x}(3x^2+x-1)$.

Решить уравнения:

1109. $y''-5y'+6y=0$.

1110. $y'''-4y''+3y'=0$.

1111. $\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+25\frac{dy}{dx}=0$.

1112. $\frac{d^3S}{dt^3}+5\frac{d^2S}{dt^2}=0$.

1113. $y'''-3y''+3y'-y=0$.

1114. $y^{(4)}-8y^{(2)}-9y=0$.

1115. $\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^2y}{dx^2}+25y=0$.

1116*. $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$.

1117. $y''-y=0$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

1118. $y''+2y'+2y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

1119*. $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+2a\frac{d\rho}{d\varphi}+a^2\rho=0$, если $\rho(0)=a$, $\rho'(0)=0$.

§ 8. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно функции и ее производных

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=q(x), \qquad (1)$$

отличающиеся от линейного однородного уравнения наличием в правой части некоторой известной функции q от независимой переменной x.

Общий интеграл y линейного неоднородного уравнения равен сумме какого-либо его частного интеграла y_1 и общего интеграла u соответствующего однородного уравнения (получающегося из неоднородного при $q=0$).

Согласно этому свойству, для решения линейного неоднородного уравнения (1) с постоянными коэффициентами p_i вначале находится функция u (по правилам § 7), затем функция y_1. Их сумма и дает общий интеграл y неоднородного уравнения: $y=u+y_1$.

Для некоторых специальных видов функции $q(x)$ частный интеграл y_1 можно найти методом неопределенных коэффициентов. По виду правой части $q(x)$ можно заранее указать вид частного интеграла y_1, где неизвестны лишь числовые коэффициенты, и затем найти его без всяких квадратур в следующих простейших случаях:

1) $q(x)=e^{mx}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен, *
2) $q(x)=e^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$,
3) $q(x)$ есть сумма указанных функций.

* В частности, если $m=0$, то $q(x)$ — многочлен, а если $P(x)$ есть постоянная c (многочлен нулевой степени), то $q(x)$ — показательная функция ce^{mx}.

В этих случаях y_1 есть функция, подобная $q(x)$, т. е. отличается от $q(x)$ только числовыми коэффициентами.

Но если число m (для случая 1) или числа $a \pm bi$ (для случая 2) являются корнями характеристического уравнения кратности k, то y_1 отличается от $q(x)$ множителем x^k.

Таким образом, для указанных видов правой части $q(x)$, зная заранее вид функции y_1 и написав ее выражение с неопределенными буквенными коэффициентами по указанному правилу, затем находим их, подставляя y_1 в данное неоднородное уравнение и сравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства.

В общем случае, при любой функции $q(x)$ частный интеграл y_1 уравнения (1) можно найти посредством n квадратур (интеграций) по формуле

$$y_1=e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left\{\int e^{(r_3-r_2)x}\left[\ldots\int e^{(r_n-r_{n-1})x}\left(\int qe^{-r_nx}dx\right)dx\ldots\right]dx\right\}dx, \quad (*)$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$—корни характеристического уравнения.*

Из этой общей формулы вытекают и правила нахождения частного интеграла y_1 для указанных специальных видов функции $q(x)$.

При $n=2$, т. е. для уравнения второго порядка,

$$y_1=e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left(\int qe^{-r_2x}dx\right)dx. \qquad (2)$$

Для уравнения третьего порядка ($n=3$)

$$y_1=e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left[\int e^{(r_3-r_2)x}\left(\int qe^{-r_3x}dx\right)dx\right]dx. \qquad (3)$$

Пользуясь этими формулами, полезно иногда выражать тригонометрические функции через показательные по формулам Эйлера (гл. IX, § 6).

1120. Решить уравнения:

1) $y''+6y'+5y=25x^2-2$; 2) $y''-2y'+10y=37\cos 3x$;
3) $y''-6y'+9y=3x-8e^x$; 4) $y'''+4y'=8e^{2x}+5e^x\sin x$.

Решение. 1) Вначале находим общий интеграл u однородного уравнения $y''+6y'+5y=0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $r^2+6r+5=0$ имеет корни $r_1=-5$, $r_2=-1$. Поэтому (согласно правилу 1, § 7) $u=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}$.

Далее находим частный интеграл y_1 данного неоднородного уравнения. Для правой части данного уравнения $q(x)=25x^2-2$,

* Если в формуле (*) после каждой интеграции прибавлять произвольную постоянную C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, то получится не частный интеграл y_1, а общий интеграл y уравнения (1).

согласно указанному правилу (случай 1, число $m=0$ не является корнем характеристического уравнения), y_1 есть функция, подобная $q(x)$, т. е. многочлен второй степени: $y_1=Ax^2+Bx+C$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y_1'=2Ax+B$, $y_1''=2A$ и подставляя y_1, y_1', y_1'' в данное уравнение, получим равенство

$$2A+6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)=25x^2-2$$

или

$$5Ax^2+(12A+5B)x+(2A+6B+5C)=25x^2-2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, ибо только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$5A=25, \quad 12A+5B=0, \quad 2A+6B+5C=-2,$$

из которой находим $A=5$, $B=-12$, $C=12$.

Следовательно, $y_1=5x^2-12x+12$, а искомый общий интеграл данного неоднородного уравнения

$$y=u+y_1=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}+5x^2-12x+12.$$

2) Составляем характеристическое уравнение $r^2-2r+10=0$, определяем его корни $r_{1,2}=1\pm3i$ и (согласно правилу 2, § 7) находим общий интеграл u однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению

$$u=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Частный интеграл y_1 данного неоднородного уравнения, соответственно его правой части $q(x)=37\cos 3x$ (случай 2 при $a=0$, $b=3$, числа $a\pm bi=\pm3i$ не являются корнями характеристического уравнения), будет функция вида

$$y_1=A\cos 3x+B\sin 3x. \text{ *}$$

Подставляя функцию y_1 и ее производные

$$y_1'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,$$
$$y_1''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A-6B)\cos 3x+(B+6A)\sin 3x=37\cos 3x,$$

которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных членов (у $\cos 3x$ и у $\sin 3x$) в обеих его частях:

$$A-6B=37; \quad B+6A=0.$$

* В данном уравнении $q(x)=37\cos 3x$. Но если бы его правая часть была $A_2\sin 3x$ или $A_1\cos 3x+A_2\sin 3x$, то все равно, согласно правилу, данному для случая 2, частный интеграл уравнения следовало искать в виде функции указанного вида, т. е. $y_1=A\cos 3x+B\sin 3x$.

Решая эту систему, найдем $A=1$; $B=-6$. Следовательно,

$$y_1=\cos 3x-6\sin 3x,$$

$$y=u+y_1=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\cos 3x-6\sin 3x.$$

3) Написав характеристическое уравнение $r^2-6r+9=0$ или $(r-3)^2=0$ и найдя его корни $r_{1,2}=3$, получим (по правилу 3, § 7) общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$u=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

Правая часть данного уравнения есть сумма многочлена первой степени $3x$ и показательной функции $-8e^x$ (случаи 3 и 1). Поэтому частный интеграл этого уравнения $y_1=Ax+B+Ce^x$.

Подставляя y_1, $y_1'=A+Ce^x$, $y_1''=Ce^x$ в данное уравнение

$$9Ax+(9B-6A)+4Ce^x=3x-8e^x$$

и приравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства, имеем систему: $9A=3$, $9B-6A=0$, $4C=-8$, из которой находим $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{9}$, $C=-2$.

Следовательно,

$$y_1=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x,$$

$$y=u+y_1=e^{3x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x.$$

4) Характеристическое уравнение $r^3+4r=0$ имеет корни $r_1=0$, $r_{2,3}=\pm 2i$, поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения есть

$$u=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$$

Частный интеграл y_1 данного неоднородного уравнения, согласно указанному правилу (случаи 3, 1 и 2), есть функция, подобная правой части;

$$y_1=Ae^{2x}+e^x(B\cos x+C\sin x).$$

Для определения коэффициентов A, B, C находим производные

$$y_1'=2Ae^{2x}+e^x[(B+C)\cos x+(C-B)\sin x],$$

$$y_1''=4Ae^{2x}+2e^x(C\cos x-B\sin x),$$

$$y_1'''=8Ae^{2x}+2e^x[(C-B)\cos x-(B+C)\sin x],$$

подставляем y_1' и y_1''' в данное уравнение:

$$16Ae^{2x}+2e^x[(B+3C)\cos x+(C-3B)\sin x]=8e^{2x}+5e^x\sin x$$

и, сравнивая коэффициенты у подобных членов, получим систему $16A=8$, $2(B+3C)=0$, $2(C-3B)=5$, из которой находим $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$y_1=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^x(\sin x-3\cos x),$$

$$y=u+y_1=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^x(\sin x-3\cos x).$$

1121. Решить уравнения:

1) $\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^2y}{dx^2}=9x^2$; 2) $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}=4e^{2t}-3e^{3t}$;

3) $4y'''+y'=3e^x+2\sin\frac{x}{2}$; 4)* $y'''+y''=1-6x^2e^{-x}$.

Решение. 1) Написав характеристическое уравнение $r^4-3r^2=0$, находим его корни $r_{1,2}=0$, $r_{3,4}=\pm\sqrt{3}$ и, по правилам § 7, составляем общий интеграл u соответствующего однородного уравнения: $u=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения есть многочлен второй степени, т. е. функция вида $e^{mx}P(x)$ (случай 1), где число $m=0$ и является двукратным корнем характеристического уравнения. Поэтому, согласно правилу, указанному в начале этого параграфа, частный интеграл y_1 данного уравнения отличается от правой части множителем x^2, т. е.

$$y_1=x^2(Ax^2+Bx+C)=Ax^4+Bx^3+Cx^2.$$

Чтобы определить значения коэффициентов A, B, C, находим производные

$$y_1'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\quad y_1''=12Ax^2+6Bx+2C,$$
$$y_1'''=24Ax+6B,\quad y^{(4)}=24A,$$

подставляем y'' и $y^{(4)}$ в данное уравнение

$$24A-3(12Ax^2+6Bx+2C)=9x^2$$

и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему: $-36A=9$, $-18B=0$, $24A-6C=0$, из которой получим $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=-1$. Следовательно,

$$y_1=-\frac{x^4}{4}-x^2;\quad y=u+y_1=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}-\frac{x^4}{4}-x^2.$$

2) Здесь характеристическое уравнение $r^3-3r^2+2r=0$ имеет корни $r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=2$, поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения есть функция $u=C_1+C_2e^t+C_3e^{2t}$.

Правая часть данного уравнения есть функция вида $e^{m_1t}P_1(t)+e^{m_2t}P_2(t)$ (случаи 3 и 1), где $m_1=2$, $P_1(t)=4$, $m_2=3$, $P_2(t)=-3$, причем число m_1 является однократным корнем характеристического уравнения. Поэтому частный интеграл x_1 данного уравнения есть функция вида

$$x_1=Ate^{2t}+Be^{3t}.$$

Далее, найдем производные

$$x_1' = Ae^{2t}(1+2t)+3Be^{3t},$$
$$x_1'' = 4Ae^{2t}(1+t)+9Be^{3t},$$
$$x_1''' = 4Ae^{2t}(3+2t)+27Be^{3t},$$

подставим их в данное уравнение $2Ae^{2t}+6Be^{3t}=4e^{2t}-3e^{3t}$ и, сравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства, получим систему $2A=4$, $6B=-3$, из которой найдем $A=2$, $B=-\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$x_1 = 2te^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t},$$
$$x = u+x_1 = C_1+C_2e^t+C_3e^{2t}+2te^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t}.$$

3) Характеристическое уравнение $4r^3+r=0$ имеет корни $r_1=0$, $r_{2,3}=\pm\frac{1}{2}i$, поэтому

$$u=C_1+C_2\cos\frac{x}{2}+C_3\sin\frac{x}{2}.$$

Правая часть данного уравнения есть сумма функций вида $e^{mx}P(x)$ и $e^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$, где $m=1$, $P(x)=3$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $A_1=0$, $A_2=2$. (Случаи 3, 1, 2.) Число m не является корнем характеристического уравнения, а числа $a\pm bi=\pm\frac{1}{2}i$ являются его однократными корнями. Поэтому частный интеграл данного уравнения есть функция вида

$$y_1 = Ae^x + x\left(B\cos\frac{x}{2}+C\sin\frac{x}{2}\right).$$

Для определения коэффициентов A, B, C трижды дифференцируем функцию y_1, подставляем y_1' и y_1''' в данное уравнение

$$5Ae^x-2B\cos\frac{x}{2}-2C\sin\frac{x}{2}=3e^x+2\sin\frac{x}{2}$$

и, сравнивая коэффициенты у подобных членов, получим систему $5A=3$, $-2B=0$, $-2C=2$, откуда имеем $A=\frac{3}{5}$, $B=0$, $C=-1$. Следовательно,

$$y_1=\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2},$$
$$y=u+y_1=C_1+C_2\cos\frac{x}{2}+C_3\sin\frac{x}{2}+\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2}.$$

4) Характеристическое уравнение $r^3+r^2=0$ имеет корни $r_{1,2}=0$, $r_3=-1$; общий интеграл соответствующего однородного

уравнения

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Правая часть данного уравнения есть функция вида $e^{m_1 x} P_1(x) + e^{m_2 x} P_2(x)$, где $m_1 = 0$, $P_1(x) = 1$, $m_2 = -1$, $P_2(x) = -6x^2$. (Случаи 3 и 1.) При этом число m_1 есть двукратный корень, а число m_2 есть однократный корень характеристического уравнения. Поэтому частный интеграл данного уравнения

$$y_1 = Ax^2 + x(Bx^2 + Cx + D)e^{-x}.$$

Подставляя эту функцию в данное уравнение, получим равенство

$$2A + [3Bx^2 + (2C - 12B)x + (6B - 4C + D)]e^{-x} = 1 - 6x^2 e^{-x},$$

откуда имеем систему

$$2A = 1, \quad 3B = -6, \quad 2C - 12B = 0, \quad 6B - 4C + D = 0,$$

из которой найдем

$$A = \frac{1}{2}, \ B = -2, \ C = -12, \ D = -36.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{2} x^2 - 2x(x^2 + 6x + 18)e^{-x},$$

$$y = u + y_1 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 2x(x^2 + 6x + 18)e^{-x}.$$

1122. По общей формуле (*) найти частный интеграл уравнения:

1) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sec^2 x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = (e^{2x} + 1)^{-\frac{3}{2}}$;

3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 5x^3 e^x + 3e^{2x}$; 4) $y'' + 4y = \cos^3 x$.

Решение. 1) Сначала составляем характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 4 = 0$ и находим его корни $r_{1,2} = -2$. Затем подставляем эти корни и правую часть $q(x)$ данного уравнения в формулу (2) и, дважды интегрируя, получим искомый частный интеграл:

$$y_1 = e^{-2x} \int \left(\int \sec^2 x \, dx \right) dx = e^{-2x} \int \operatorname{tg} x \, dx = -e^{-2x} \ln|\cos x|.$$

2) Характеристическое уравнение $r^2 + 5r + 6 = 0$ имеет корни $r_1 = -3$, $r_2 = -2$. Подставляя их и правую часть данного уравнения в формулу (2), получим

$$y_1 = e^{-3x} \int e^x \left[\int e^{2x} (e^{2x} + 1)^{-\frac{3}{2}} dx \right] dx.$$

Интегралы находим отдельно:

$$I_1=\int e^{2x}(e^{2x}+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(e^{2x}+1)^{-\frac{3}{2}}d(e^{2x}+1)=-(e^{2x}+1)$$

$$I_2=\int e^x I_1\,dx=-\int\frac{de^x}{\sqrt{(e^x)^2+1}}=-\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right).$$

Следовательно, искомый частный интеграл данного уравнения

$$y_1=-e^{-3x}\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right).$$

3) Характеристическое уравнение $r^3-3r^2+3r-1=0$ имеет корни $r_1=r_2=r_3=1$. Подставляя эти корни и правую часть данного уравнения в формулу (3) и трижды интегрируя, получим

$$y_1=e^x\int\left\{\int\left[\int(5x^3+3e^x)\,dx\right]dx\right\}dx=$$

$$=e^x\int\left\{\int\left[\frac{5x^4}{4}+3e^x\right]dx\right\}dx=e^x\int\left\{\frac{x^5}{4}+3e^x\right\}dx=e^x\left(\frac{x^6}{24}+3e^x\right).$$

4) Характеристическое уравнение $r^2+4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm 2i$. Пользуясь формулой (2), получим

$$y_1=e^{2ix}\int e^{-4ix}\left(\int e^{2ix}\cos^3 x\,dx\right)dx.$$

Выражая $\cos^3 x$ через показательные функции (по формуле Эйлера, гл. IX, § 6) и интегрируя, найдем

$$I_1=\int e^{2ix}\cos^3 x\,dx=\int e^{2ix}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix})\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{5ix}}{5i}+\frac{e^{3ix}}{i}+\frac{3e^{ix}}{i}-\frac{e^{-ix}}{i}\right);$$

$$I_2=\int e^{-4ix}I_1\,dx=\frac{1}{8i}\int\left(\frac{e^{ix}}{5}+e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8i}\left(\frac{e^{ix}}{5i}-\frac{e^{-ix}}{i}-\frac{e^{-3ix}}{i}+\frac{e^{-5ix}}{5i}\right);$$

$$y_1=e^{2ix}I_2=\frac{1}{8i^2}\left(\frac{e^{3ix}}{5}-e^{ix}-e^{-ix}+\frac{e^{-3ix}}{5}\right).$$

Вторично пользуясь формулами Эйлера, выразим результат через тригонометрические функции

$$y_1=-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{5}\cos 3x-2\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(\cos x-\frac{1}{5}\cos 3x\right).$$

Решить уравнения:

1123. $y''+4y=5e^x$. **1124.** $y''+y'-2y=6x^2$.

1125. $y''+6y'+9y=10\sin x$. **1126.** $y'''-y''-4y'+4y=x^2+3$.

1127. $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=te^{-t}$. **1128.** $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=4(x+1)$.

1129. $y''+9y=15\sin 2x$, если $y(0)=-7$, $y'(0)=0$.

1130. $y''-3y'=3x+x^2$, если $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{70}{27}$.

1131. $\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}+6t$. 1132. $\frac{d^4s}{dt^4}+4\frac{d^3s}{dt^3}=4\cos 4t$.

1133*. $y''-2y'+y=xe^x$. 1134*. $y''-5y'+6y=6+2e^x+e^{2x}$.

1135*. $y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$. 1136*. $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=8\cos x$.

По общей формуле (*) найти частный интеграл уравнения:

1137. $y''-5y'+6y=e^x(e^x+4)$. 1138. $y''+2y'+y=xe^x\cos x$.

1139. $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cos^3 x$. 1140. $y''+16y=\sin^3 x$.

1141. $y''-3y'+2y=e^{2x}(e^x+1)^{-1}$. 1142. $y'''+4y'=\sin^2 x\cos x$.

§ 9. Смешанные задачи на интегрирование уравнений разных типов

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены наиболее употребительные типы дифференциальных уравнений, приводящихся к квадратурам, и указаны способы их решения. В нижеследующих задачах студент должен самостоятельно определить тип данного дифференциального уравнения и затем решить его соответствующим способом.

1143. $xyy'+x^2-y^2=0$. 1144. $1+(x\cos y-\sin 2y)\,y'=0$.

1145. $x+yy'+(1+y')\,xy=0$, если $y(0)=0$.

1146. $\left(y\cos\frac{y}{x}-x\right)dx=x\cos\frac{y}{x}\,dy$. 1147. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$.

1148. $y''+4=8\cos^2 x$, если $y(0)=y'(0)=0$.

1149. $xy'\cos y+\sin y=0$. 1150. $(1-xy^3)\,dx=x^2y^2\,dy$.

1151. $y''\sin x=(1+y')\cos x$, если $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

1152*. $y^2dx-(2xy-3)\,dy=0$, если $y(1)=1$.

1153. $(1-ye^{-x})\,dx+e^{-x}dy=0$. 1154*. $y''-2y'+y=4e^x+e^{-x}\sin x$.

1155. $y''+y'=2x^2e^x$, если $y(0)=5$, $y'(0)=0{,}5$.

1156. $y''\sin y-2(y')^2\cos y=0$, если $y(0)=\frac{\pi}{4}$, $y'(0)=2$.

1157. $y'''\sin^4 x=\sin 2x$. 1158*. $y'''-3y'-2y-\sin x=2\cos x$.

1159. $y'''-y''-y'+y=3x+e^x(24x-4)$.

1160. $y''+y=\sec x$. 1161*. $y''+2ay'+a^2y=\sqrt{x}e^{-ax}$.

§ 10. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задачи, решение которых приводится к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций, весьма разнообразны. В таких задачах ищется функция или зависимость между переменными факторами какого-либо физического, химического или технического процесса, уравнение (форма) линии или поверхности.

При решении этих задач вначале составляется дифференциальное уравнение задачи, которое затем решается тем или иным способом в зависимости от его типа.