1131. $\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}+6t$. 1132. $\frac{d^4s}{dt^4}+4\frac{d^3s}{dt^3}=4\cos 4t$.
1133*. $y''-2y'+y=xe^x$. 1134*. $y''-5y'+6y=6+2e^x+e^{2x}$.
1135*. $y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$. 1136*. $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=8\cos x$.
По общей формуле (*) найти частный интеграл уравнения:
1137. $y''-5y'+6y=e^x(e^x+4)$. 1138. $y''+2y'+y=xe^x\cos x$.
1139. $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cos^3 x$. 1140. $y''+16y=\sin^3 x$.
1141. $y''-3y'+2y=e^{2x}(e^x+1)^{-1}$. 1142. $y'''+4y'=\sin^2 x\cos x$.

§ 9. Смешанные задачи на интегрирование уравнений разных типов

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены наиболее употребительные типы дифференциальных уравнений, приводящихся к квадратурам, и указаны способы их решения. В нижеследующих задачах студент должен самостоятельно определить тип данного дифференциального уравнения и затем решить его соответствующим способом.

1143. $xyy'+x^2-y^2=0$. 1144. $1+(x\cos y-\sin 2y)y'=0$.
1145. $x+yy'+(1+y')xy=0$, если $y(0)=0$.
1146. $\left(y\cos\frac{y}{x}-x\right)dx=x\cos\frac{y}{x}\,dy$. 1147. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$.
1148. $y''+4=8\cos^2 x$, если $y(0)=y'(0)=0$.
1149. $xy'\cos y+\sin y=0$. 1150. $(1-xy^3)\,dx=x^2y^2\,dy$.
1151. $y''\sin x=(1+y')\cos x$, если $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.
1152*. $y^2\,dx-(2xy-3)\,dy=0$, если $y(1)=1$.
1153. $(1-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0$. 1154*. $y''-2y'+y=4e^x+e^{-x}\sin x$.
1155. $y''+y'=2x^2e^x$, если $y(0)=5$, $y'(0)=0{,}5$.
1156. $y''\sin y-2(y')^2\cos y=0$, если $y(0)=\frac{\pi}{4}$, $y'(0)=2$.
1157. $y'''\sin^4 x=\sin 2x$. 1158*. $y'''-3y'-2y-\sin x=2\cos x$.
1159. $y'''-y''-y'+y=3x+e^x(24x-4)$.
1160. $y''+y=\sec x$. 1161*. $y''+2ay'+a^2y=\sqrt{x}e^{-ax}$.

§ 10. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задачи, решение которых приводится к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций, весьма разнообразны. В таких задачах ищется функция или зависимость между переменными факторами какого-либо физического, химического или технического процесса, уравнение (форма) линии или поверхности.

При решении этих задач вначале составляется дифференциальное уравнение задачи, которое затем решается тем или иным способом в зависимости от его типа.

Дифференциальное уравнение задачи составляется по ее условию и в зависимости от условия задачи оно получается либо как соотношение между дифференциалами переменных величин, либо как соотношение, содержащее производные неизвестной функции.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между дифференциалами переменных можно делать различные допущения, упрощающие задачу и, вместе с тем, не отражающиеся на результатах. Так, например, подобно тому как и при отыскании дифференциала неизвестной величины (гл. V, § 3), здесь можно небольшой участок кривой считать прямолинейным, небольшой участок поверхности — плоским, в течение малого промежутка времени переменное движение можно рассматривать как равномерное, а всякий физический, химический или технический процесс как протекающий с неизменной скоростью.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между производными используется геометрический, физический или механический смысл производной (гл. II, § 1, 11, 12, 14, 15).

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения задачи, в зависимости от ее условия, используются известные законы физики, химии, механики и других наук и различные математические сведения.

1162. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

Решение. Уравнение касательной в любой точке (x, y) искомой кривой будет $Y-y=y'(X-x)$, где X, Y — координаты любой точки на касательной (гл. II, § 11).

Полагая в этом уравнении $Y=0$, найдем абсциссу X_0 точки пересечения касательной с осью Ox: $X_0=x-\frac{y}{y'}$.

Согласно условию задачи, $X_0+x=0$, т. е. $2x-\frac{y}{y'}=0$.

Решая это дифференциальное уравнение искомой кривой как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x};\quad 2\ln|y|=\ln|x|+\ln C;\quad y^2=Cx.$$

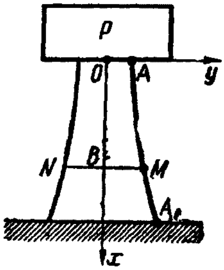
Следовательно, искомая кривая есть парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox.

1163. Какую форму должна иметь однородная вертикальная колонна с круглым поперечным сечением, чтобы давление удерживаемого ею груза P и ее собственного веса, приходящееся на единицу площади горизонтального сечения, было всюду одинаково? (Колонна равного давления.) Удельный вес материала колонны δ, а радиус ее верхнего основания r.

Найти затем радиусы верхнего и нижнего оснований мостового быка, чтобы давление в любом его горизонтальном сечении было 3000 *кГ/дм*², если удельный вес материала быка 2,5, его высота 12 *м*, а удерживаемый им груз 90 000 *кГ*.

Решение. Пусть сечение колонны вертикальной плоскостью, проходящей через ее ось симметрии, имеет вид, изображенный на черт. 210.

Выбрав прямоугольную систему координат xOy, пересечем колонну горизонтальной плоскостью, проходящей через произвольную точку $M(x, y)$ искомой кривой AA_1 и определим давление груза P и собственного веса верхней отсеченной части колонны на единицу площади полученного горизонтального сечения MN.



Черт. 210

Объем верхней отсеченной части колонны как объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции $OAMB$, прилежащей к оси Ox, вокруг оси Ox (гл. V, § 5),

$$v = \pi \int_0^x y^2\,dx, \text{ а ее вес } Q = \delta v.$$

Взяв отношение $P+Q$ к площади $S = \pi y^2$ сечения MN, получим давление на единицу площади этого сечения, которое по условию задачи должно быть равно давлению на единицу площади любого другого горизонтального сечения.

Давление на единицу площади верхнего основания колонны равно $\frac{P}{\pi r^2}$, $r = OA$, что следует из условия задачи. Поэтому

$$\frac{P+Q}{S} = \frac{P}{\pi r^2} \text{ или } P+Q = \frac{PS}{\pi r^2},$$

$$P + \pi\delta \int_0^x y^2\,dx = \frac{P}{r^2}\,y^2.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим дифференциальное уравнение кривой AA_1

$$\pi\delta y^2\,dx = \frac{2P}{r^2}\,y\,dy.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, найдем

$$dx = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\,\frac{dy}{y}; \qquad x + c = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln y.$$

Из условия $y = r$ при $x = 0$ находим, что постоянная $c = \frac{2P\ln r}{\pi\delta r^2}$.

Следовательно, уравнение кривой AA_1 есть

$$x = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{y}{r}, \tag{1}$$

а искомая форма колонны равного давления есть поверхность, образованная вращением этой кривой вокруг оси Ox:

$$x=\frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}\ ^*.$$

При такой форме колонны давление во всех ее точках будет одинаково.

Для указанного в условии мостового быка радиус верхнего основания определяется из равенства

$$\frac{90000}{\pi r^2}=3000;\quad r\approx 3{,}09\ дм,$$

а радиус нижнего основания путем подстановки известных величин в равенство (1)

$$120\approx\frac{2\cdot 90000}{\pi\cdot 2{,}5\cdot 3{,}09^2}\ln\frac{r_1}{3{,}09};\quad r_1\approx 3{,}24\ м.$$

Аналогично определяется и форма длинных стержней или канатов, которые под действием собственного веса и некоторого груза имеют во всех поперечных сечениях одинаковое натяжение.

1164. Найти зависимость скорости падения тела в воздухе от времени, если сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости v и площади S наибольшего сечения тела, перпендикулярного к направлению движения, $F=kSv^2$.

Найти затем: 1) поведение скорости падения тела при возрастании времени и 2) радиус парашюта, чтобы при общем весе парашюта и летчика в 100 $кГ$ наибольшая скорость падения не превосходила 5 $м/сек$, полагая $k=0{,}083$.

Решение. Согласно условию задачи и второму закону Ньютона в механике, дифференциальное уравнение движения центра тяжести падающего тела будет

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kSv^2\quad \text{или}\quad \frac{dv}{dt}=g-av^2,\quad a=\frac{kS}{m},$$

где m — масса тела, v — скорость падения тела в момент времени t, g — ускорение силы тяжести.

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{g-av^2}=dt;\quad t=\frac{1}{2\sqrt{ag}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}}+c. \qquad (2)$$

Из начального условия $v=0$ при $t=0$ определяем значение постоянной $c=0$, подставляем его в равенство (2) и, разрешая это равенство относительно v, найдем искомую зависимость

* Если линия $f(x, y)=0$, лежащая в плоскости xOy, вращается вокруг оси Ox, то уравнение полученной поверхности вращения будет $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

скорости падения тела от времени

$$v=\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{e^{2t\sqrt{ag}}-1}{e^{2t\sqrt{ag}}+1}=\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1-\frac{2}{e^{2t\sqrt{ag}}+1}\right). \qquad (3)$$

1) Полученная зависимость обнаруживает интересный и практически важный факт: с увеличением времени скорость падения тела в воздухе имеет предел: $\lim\limits_{t\to+\infty} v=\sqrt{\frac{g}{a}}$.

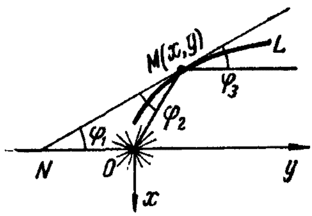
Теоретически такую скорость падающее тело приобретает лишь спустя бесконечно большой промежуток времени, но практически, как это следует из формулы (3), уже спустя несколько секунд после начала падения величина скорости тела будет очень близка к ее предельному значению, т. е. практически можно считать, что через несколько секунд после начала падения тела в воздухе оно становится равномерным.

2) Подставляя заданные значения величин в приближенное равенство $v\approx\sqrt{\frac{g}{a}}=\sqrt{\frac{mg}{kS}}$, найдем радиус парашюта:

$$5\approx\sqrt{\frac{100}{0{,}083\pi r^2}},\quad r\approx\frac{1}{5}\sqrt{\frac{100}{0{,}083\pi}}\approx 3{,}92\text{ м}.$$

1165. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки, параллельно данному направлению.

Решение. Пересечем поверхность зеркала плоскостью, проходящей через данную точку параллельно данному направлению. Выберем данную точку за начало прямоугольной системы координат, расположенной в этой плоскости, направим ось Oy по данному направлению отраженных лучей и найдем уравнение кривой L, полученной при пересечении искомой поверхности указанной плоскостью (черт. 211).



Черт. 211

Так как угол падения равен углу отражения, то и $\angle\varphi_3=\angle\varphi_2$. Но $\angle\varphi_3=\angle\varphi_1$, поэтому треугольник MON — равнобедренный и $OM=ON$.

Написав уравнение касательной MN

$$Y-y=y'(X-x)$$

и полагая в нем $X=0$, найдем $Y=-ON=y-xy'<0$. Длина отрезка $OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

Приравнивая найденные выражения ON и OM, получим дифференциальное уравнение кривой L

$$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Решая его как однородное уравнение 1-го порядка (§ 3), легко найдем его общий интеграл

$$y=\frac{x^2-c^2}{2c},$$

которому соответствует семейство парабол, симметричных оси Oy с общим фокусом в заданной точке O.

Кривая L будет одна из парабол этого семейства, и так как она расположена в произвольной плоскости, проходящей через ось Oy, то искомая поверхность зеркала есть параболоид

$$y=\frac{x^2+z^2-c^2}{2c},$$

образованный вращением кривой L вокруг ее оси.

Такие *параболические зеркала, преобразующие расходящийся пучок лучей в параллельный, употребляются для прожекторов.*

1166. Сосуд емкостью 100 *л* наполнен рассолом, содержащим 10 *кг* растворенной соли. В одну минуту в него втекает 3 *л* воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается.

В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково?

Решение. Пусть в момент времени t (*мин*) в первом сосуде содержится x (*кг*) соли и пусть в последующий малый промежуток времени dt количество соли в этом сосуде уменьшится на dx.

За время dt из сосуда вытечет $3dt$ (*л*) рассола. Концентрация рассола (количество соли в одном литре раствора) в момент t будет $\frac{x}{100}$ (*кг/л*). Если допустить, что в течение малого промежутка времени dt концентрация рассола оставалась неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx=\frac{x}{100}\cdot 3dt$ (так как $dx<0$).

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x}=-\frac{3}{100}dt;\quad \ln x=-0{,}03t+c.$$

Исходя из начального условия $x=10$ при $t=0$, определяем значение постоянной $c=\ln 10$.

Следовательно, зависимость количества соли x в первом сосуде от времени t будет

$$\ln x=-0{,}03t+\ln 10 \quad \text{или} \quad x=10e^{-0{,}03t}. \tag{4}$$

Далее найдем зависимость количества соли y от времени t для второго сосуда.

Во втором сосуде в момент t концентрация рассола будет $\frac{y}{100}$ (*кг/л*). За время dt в него вольется $3dt$ (*л*) рассола, содержащего $\frac{3x}{100}\,dt$ (*кг*) соли, а выльется $3dt$ (*л*) рассола, содержащего $\frac{3y}{100}\,dt$ (*кг*) соли, т. е. за время dt количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0{,}03x\,dt - 0{,}03y\,dt, \quad \text{или} \quad dy = 0{,}03\,(x-y)\,dt.$$

Заменяя x в этом уравнении по формуле (4), получим линейное уравнение 1-го порядка

$$dy = 0{,}03\,(10e^{-0{,}03t} - y)\,dt, \quad y' + 0{,}03y = 0{,}3e^{-0{,}03t},$$

общий интеграл которого

$$y = e^{-0{,}03t}\,(c_1 + 0{,}3t).$$

(Его легко найти способом, указанным в § 4.)

Значение постоянной $c_1 = 0$ определяем из начального условия: $y = 0$ при $t = 0$.

Следовательно, зависимость количества соли y во втором сосуде от времени t будет

$$y = 0{,}3te^{-0{,}03t}.$$

Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах будет одинаково, найдем, полагая $x = y$:

$$10e^{-0{,}03t} = 0{,}3te^{-0{,}03t}; \quad 10 = 0{,}3t; \quad t = 33\frac{1}{3}\ \textit{сек.}$$

В этот момент в каждом сосуде будет по $\frac{10}{e} \approx 3{,}68$ *кг* соли.

1167. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью 72 *км/час*. Во сколько времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

Решение. Согласно второму закону Ньютона в механике, дифференциальное уравнение движения локомотива будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -0{,}2mg,$$

где s — путь, пройденный за время t, m — масса локомотива, g — ускорение силы тяжести.

Умножая обе части этого уравнения на dt и затем интегрируя дважды, получим

$$\frac{ds}{dt} = -0{,}2gt + c_1, \quad s = -0{,}1gt^2 + c_1t + c_2.$$

Значения постоянных c_1 и c_2 определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 72\ \textit{км/час} = 20\ \textit{м/сек.}$

Из первого условия имеем $c_2 = 0$. Из второго условия следует, что $c_1 = 20$.

Следовательно, уравнения движения локомотива будут:

$$\frac{ds}{dt} = v = 20 - 0{,}2gt \ (м/сек), \tag{5}$$

$$s = 20t - 0{,}1\, gt^2 \ (м). \tag{6}$$

Полагая $v=0$ в уравнении (5), найдем время торможения, в течение которого локомотив будет остановлен тормозом:

$$t = \frac{20}{0{,}2g} \approx \frac{100}{9{,}8} \approx 10{,}2 \ сек.$$

Полагая $t \approx 10{,}2$ в уравнении (6), найдем тормозной путь:

$$s \approx 20 \cdot 10{,}2 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10{,}2^2 \approx 102 \ м.$$

1168. Пуля входит в доску толщиной 10 *см* со скоростью 200 *м/сек*, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью 50 *м/сек*. Найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально квадрату ее скорости.

Решение. Пусть m — масса пули, s — путь, пройденный ею за время t, отсчитываемое от момента входа ее в доску. Тогда дифференциальное уравнение движения пули через доску будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \ a = \frac{k}{m}.$$

Полагая в этом уравнении 2-го порядка $\frac{ds}{dt} = v$, получим уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dt} = -av^2, \quad \frac{dv}{v^2} = -a\,dt,$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{1}{v} = at + c_1 \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{at + c_1}.$$

По начальному условию $v = 200$ при $t = 0$, данному в задаче, определим постоянную c_1:

$$200 = \frac{1}{c_1}, \quad c_1 = \frac{1}{200}.$$

Следовательно, зависимость скорости движения пули через доску от времени будет

$$v = \frac{200}{1 + 200at}. \tag{7}$$

Полагая в последнем уравнении $v = \frac{ds}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$ds = \frac{200dt}{1 + 200at}, \quad s = \frac{1}{a}\ln(1 + 200at) + c_2.$$

Из условия $s=0$ при $t=0$ следует, что $c_2=0$.

Следовательно, зависимость расстояния, проходимого пулей в доске, от времени будет

$$s=\frac{1}{a}\ln(1+200at). \qquad (8)$$

Полагая $v=50$ в равенстве (7) и $s=0,1$ (*м*) в равенстве (8), получим систему уравнений с неизвестными t и a:

$$50=\frac{200}{1+200at}; \quad 0,1=\frac{1}{a}\ln(1+200at).$$

Определив из первого уравнения $1+200at=4$ и подставляя во второе, найдем значение a:

$$0,1=\frac{1}{a}\ln 4; \quad a=10\ln 4.$$

Наконец, подставляем значение a в первое уравнение решаемой системы и определяем из него искомое время полета пули через доску:

$$50=\frac{200}{1+(200\cdot 10\ln 4)t}; \quad t=\frac{3}{2000\ln 4}\approx 0,001 \text{ сек.}$$

1169. Цепь, висящая на гладком крюке, соскальзывает вниз. В начале движения по одну сторону крюка свисает 10 *м* цепи, а по другую 8 *м*. Не учитывая сопротивлений, найти: 1) во сколько времени с крюка соскользнет вся цепь и 2) какова будет скорость цепи в начальный момент ее свободного падения.

Решение. Если в момент времени t длина движущейся вниз части цепи равна s (*м*), то в этот момент сила F, движущая цепь, равна разности между весами частей цепи, свисающими по разные стороны крюка, $F=\delta gs-\delta g(18-s)=2\delta g(s-9)$, где δ — масса 1 *м* цепи, g — ускорение силы тяжести.

Согласно второму закону механики, дифференциальное уравнение движения цепи будет

$$18\delta\frac{d^2s}{dt^2}=2\delta g(s-9) \quad \text{или} \quad 9\frac{d^2s}{dt^2}=g(s-9).$$

Решим его как неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной t (§ 6)*.

Полагая $\frac{ds}{dt}=v$, имеем $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}=v\frac{dv}{ds}$,

$$9v\frac{dv}{ds}=g(s-9); \quad 9v\,dv=g(s-9)\,ds;$$

$$\frac{9}{2}v^2=\frac{g}{2}(s-9)^2+\frac{c_1}{2}; \quad 9v^2=g(s-9)^2+c_1.$$

* Иначе его можно решать как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффицнентами (§ 8).

Значение постоянной c_1 определяем из начального условия, данного в задаче: при $s=10$, $v=0$:

$$0=g(10-9)^2+c_1;\ c_1=-g;$$
$$9v^2=g(s-9)^2-g. \qquad (9)$$

Заменяя в уравнении (9) $v=\frac{ds}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$9\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g(s-9)^2-g;\quad \frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{3}\sqrt{(s-9)^2-1};$$
$$\frac{d(s-9)}{\sqrt{(s-9)^2-1}}=\frac{\sqrt{g}}{3}dt;\ \ln\left[s-9+\sqrt{(s-9)^2-1}\right]=\frac{\sqrt{g}}{3}t+c_2.$$

Значение постоянной c_2 определяем из начального условия: при $t=0$, $s=10$.

$$\ln 1=c_2;\quad c_2=0;$$
$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left[s-9+\sqrt{(s-9)^2-1}\right]. \qquad (10)$$

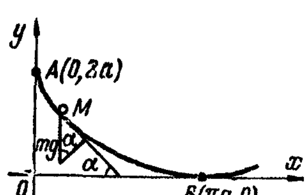
Время, за которое с крюка соскользнет вся цепь, найдем из уравнения (10), полагая в нем $s=18$:

$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(9+\sqrt{80}\right)\approx 2{,}9 \text{ сек.}$$

Скорость цепи в начальный момент ее свободного падения найдем из уравнения (9), полагая в нем $s=18$:

$$v=\frac{\sqrt{80g}}{3}\approx 9{,}3 \text{ м/сек.}$$

1170. Шарик скатывается по гладкому желобу, изогнутому по циклоиде (черт. 212). Не учитывая трения и сопротивления воздуха, найти: 1) зависимость пути, проходимого центром тяжести шарика, от времени; 2) за какое время шарик скатывается от начала желоба до его низшей точки: а) по желобу и б) по прямой линии.



Черт. 212

Решение. Если тело массы m движется как угодно в плоскости или в пространстве, то равнодействующая $\bar{F}$ приложенных к нему сил и ускорение $\bar{w}$ его центра тяжести связаны соотношением $m\bar{w}=\bar{F}$. (Второй закон Ньютона в механике.)

Из этого соотношения между векторами можно получить соотношения, содержащие скалярные величины, проектируя векторы $\bar{F}$ и $\bar{w}$ на какое-либо направление. Так, если проекция

$\overline{w}$ на какую-либо ось есть w_k, а проекция $\overline{F}$ на ту же ось есть F_k, то $mw_k = F_k$.

Согласно этому закону механики, проектируя ускорение центра тяжести шарика и действующую на него силу на направление касательной к траектории (циклоиде), получим дифференциальное уравнение движения центра тяжести шарика:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg \sin \alpha, \tag{11}$$

где $s = \smile{AM}$ — путь, пройденный центром тяжести шарика за время t, m — масса шарика, g — ускорение силы тяжести.

1) Чтобы в этом уравнении было только две переменных, выразим $\sin \alpha$ через s, исходя из параметрических уравнений циклоиды $x = a(\varphi - \sin \varphi)$, $y = a(1 + \cos \varphi)$ относительно указанной на чертеже прямоугольной системы координат.

Найдем производную

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-a \sin \varphi \, d\varphi}{a(1-\cos \varphi)\, d\varphi} = -\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

затем дифференциал дуги циклоиды

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2a \sin \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

и длину ее дуги AM

$$s = \int_0^{\varphi} 2a \sin \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi}^{0} = 4a\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right). \tag{*}$$

Отсюда $\cos \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{s}{4a}$, а из чертежа $y' = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Поэтому

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \cos \frac{\varphi}{2},$$

т. е. $\sin \alpha = 1 - \frac{s}{4a}$.

Следовательно, уравнение (11) преобразуется к виду

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \quad \text{или} \quad 4a\frac{d^2s}{dt^2} + gs = 4ag. \tag{12}$$

Решаем его как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8)*.

---

* Иначе его можно решать как неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной t (§ 6).

Характеристическое уравнение $4ar^2+g=0$ имеет мнимые корни $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{g}{4a}}=\pm ki$. Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения $u=c_1\cos kt+c_2\sin kt$.

Частный интеграл s_1 неоднородного уравнения (12) подобен его правой части: $s_1=A$. Подставляя s_1 в уравнение (12), получим $gA=4ag$, $A=4a$, т. е. $s_1=4a$.

Общий интеграл уравнения (12) есть

$$s=u+s_1=4a+c_1\cos kt+c_2\sin kt. \tag{13}$$

Значения постоянных c_1 и c_2 определим из начальных условий при $t=0$, $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$.

Из первого условия имеем: $0=4a+c_1$; $c_1=-4a$.

Найдя $\frac{ds}{dt}=-c_1k\sin kt+c_2k\cos kt$ из равенства (13) и используя второе условие, получим: $0=c_2k$; $c_2=0$.

Следовательно, искомая зависимость пути, проходимого центром тяжести шарика, от времени будет

$$s=4a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right). \tag{14}$$

2) В низшей точке B желоба $\alpha=0$. Поэтому из уравнения (11) следует, что $\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_B=0$, а из уравнения (12) следует, что $\breve{AB}=4a$. (Длину дуги AB циклоиды можно найти и по формуле (*) при $\varphi_B=\pi$.)

Подставляя $s=\breve{AB}=4a$ в уравнение (14), найдем время скатывания шарика от точки A до точки B по циклоидальному желобу:

$$4a=4a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right);\quad \cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}=0;$$

$$t\sqrt{\frac{g}{4a}}=\frac{\pi}{2};\quad t_{\breve{AB}}=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

При скатывании шарика по прямой AB дифференциальное уравнение движения его центра тяжести будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg\sin\angle ABO \quad\text{или}\quad g\frac{d^2s}{dt^2}=b,$$

где

$$b=g\sin\angle ABO=g\frac{OA}{AB}=\frac{2ag}{\sqrt{OA^2+OB^2}}=\frac{2ag}{\sqrt{4a^2+\pi^2a^2}}=\frac{2g}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$

Решаем это простейшее уравнение 2-го порядка последовательным интегрированием обеих его частей (§ 6):

$$\frac{ds}{dt}=bt+C_1;\quad s=\frac{bt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

При тех же начальных условиях: $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=0$ при $t=0$, найдем $C_1=C_2=0$. Поэтому уравнение движения центра тяжести шарика по прямой AB будет

$$s=\frac{gt^2}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$

Подставляя в это уравнение вместо s длину прямолинейного отрезка $AB=a\sqrt{4+\pi^2}$, найдем время скатывания шарика из точки A в точку B по прямой линии:

$$a\sqrt{4+\pi^2}=\frac{gt^2}{\sqrt{4+\pi^2}};\quad t_{AB}=\sqrt{\frac{a}{g}(4+\pi^2)}.$$

Простое сравнение полученных результатов обнаруживает замечательный факт: $\smile{AB}>AB$, а $t_{\smile{AB}}<t_{AB}$, т. е. хотя кратчайшее расстояние между двумя точками есть длина соединяющего их прямолинейного отрезка, время скатывания шарика по циклоиде значительно меньше, чем по прямой линии.

Объясняется это тем, что при скатывании шарика по дуге AB циклоиды модуль его скорости возрастает быстрее, чем при скатывании по прямой AB, хотя в точке B обе эти скорости по модулю будут одинаковы.

Циклоида обладает еще одним замечательным свойством: время скатывания шарика до низшей точки циклоиды не зависит от его начального положения на циклоиде. Если несколько шариков, положенных в разные точки циклоидального желоба, одновременно начнут скатываться, то все они одновременно достигнут его низшей точки.

В справедливости этого можно убедиться, если для выражения $\sin\alpha$ через s в уравнении (11) вместо точки A за начальную точку движения шарика взять произвольную точку A_1 циклоиды ($\varphi=\varphi_1$). Это свойство, также кажущееся парадоксальным, ибо шарик A должен преодолеть тот же путь, что и шарик M, и еще путь AM, объясняется тем, что первый шарик пройдет путь MB быстрее, чем второй, и это обстоятельство полностью компенсирует излишек пути AM первого шарика.

1171. Найти кривую, у которой все нормали проходят через точку (2; —3).

1172. Найти кривую, проходящую через точку (3; 4), у которой отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

1173. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества a радия распадается в течение 100 лет.

1174. В воде с температурой 20° в течение 10 *мин* тело охлаждается от 100° до 60°. Во сколько времени тело охладится до 30°, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

1175. В резервуаре находится 60 *л* рассола, содержащего 5 *кг* растворенной соли. В каждую минуту в него вливается 3 *л* воды и вытекает 2 *л* рассола, причем концентрация соли поддерживается равномерной. Сколько соли останется в резервуаре через 40 *мин*?

1176*. Найти форму поверхности, все точки которой одинаково освещены одним источником света. (Освещение пропорционально косинусу угла падения и обратно пропорционально квадрату расстояния. Использовать полярную систему координат и формулу $\operatorname{tg}\theta=\frac{\rho d\varphi}{d\rho}$, где θ—угол между полярным радиусом и касательной.)

1177*. Найти кривые, у которых касательная и нормаль любой точки равноудалены от начала координат.

1178. Моторная лодка движется со скоростью 18 *км/час*. Через 5 *мин* после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 *км/час*. Найти расстояние, пройденное лодкой по инерции за 15 *мин*, если сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

1179*. Материальная точка массы m брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Считая, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения, найти:

1) время t_1 подъема точки до наибольшей высоты;
2) наибольшую высоту h подъема точки;
3) скорость v_2 точки в момент ее падения на землю;
4) время t_2 обратного падения точки до земли.

1180. Цепь длиной 6 *м* соскальзывает вниз с гладкой горизонтальной площадки. Не учитывая сопротивлений, найти, во сколько времени соскользнет вся цепь, если в начальный момент свисал 1 *м* цепи.

1181*. Решить задачу 1169, учитывая силу трения, равную весу 1 *м* цепи.

1182. Аэросани скользят по горизонтальному снежному полю со скоростью v_0, преодолевая трение лыж о снег, пропорциональное весу саней, и сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости движения. Найти расстояние, пройденное санями после выключения мотора, по инерции.

1183*. Вагон, стоящий на прямолинейном горизонтальном участке пути, приходит в движение вследствие давления ветра, пропорционального квадрату скорости ветра относительно вагона.

Найти уравнения движения вагона, считая скорость ветра постоянной и учитывая силу трения, пропорциональную весу вагона.

Каково будет поведение скорости движения вагона с увеличением времени?

1184. Маятник, состоящий из небольшого тела массы m, подвешенного на нити длиной l, отклонен от положения равновесия на небольшой угол θ_0. Найти уравнение колебаний маятника и период колебания (не учитывая сопротивлений и полагая $\sin\theta \approx \theta$).

1185*. Решить задачу 1184, учитывая сопротивление воздуха, пропорциональное скорости движения.

§ 11. Метод Эйлера приближенного интегрирования уравнений первого порядка

Решение многих дифференциальных уравнений нельзя свести к интегрированию известных функций (к квадратурам). Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы интегрирования уравнений.

Для уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$ можно составить таблицу приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, или приближенно вычертить интегральную кривую на некотором отрезке $[x_0, x_n]$, пользуясь методом Эйлера.

По методу Эйлера данный отрезок $[x_0, x_n]$ разбивается точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n частичных отрезков.

На первом частичном отрезке $[x_0, x_1]$ искомая интегральная кривая, проходящая через известную точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется касательной к ней в точке M_0:

$$y - y_0 = (x - x_0)\, y'(x_0, y_0),$$

откуда при $x = x_1$ получается приближенное значение y_1 искомого интеграла уравнения в точке x_1:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)\, y'(x_0, y_0) = y_0 + h_0 y'_0.$$

Далее, тем же способом для отрезка $[x_1, x_2]$ находим приближенное значение y_2 искомого интеграла в точке x_2:

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)\, y'(x_1, y_1) = y_1 + h_1 y'_1.$$

Продолжая этот процесс, последовательно находим приближенные значения $y_3, y_4, \ldots, y_n$ искомого интеграла в точках $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

С увеличением n, при достаточно малой длине частичных отрезков, этим методом можно достигнуть заданной точности решения.

Обычно заданный отрезок $[x_0, x_n]$ делится на частичные отрезки одинаковой длины $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ и все последовательные приближенные значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ интеграла уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$,