

Каково будет поведение скорости движения вагона с увеличением времени?

1184. Маятник, состоящий из небольшого тела массы m , привешенного на нити длиной l , отклонен от положения равновесия на небольшой угол θ_0 . Найти уравнение колебаний маятника и период колебания (не учитывая сопротивлений и полагая $\sin \theta \approx \theta$).

1185*. Решить задачу 1184, учитывая сопротивление воздуха, пропорциональное скорости движения.

§ 11. Метод Эйлера приближенного интегрирования уравнений первого порядка

Решение многих дифференциальных уравнений нельзя свести к интегрированию известных функций (к квадратурам). Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы интегрирования уравнений.

Для уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$ можно составить таблицу приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, или приближенно вычертить интегральную кривую на некотором отрезке $[x_0, x_n]$, пользуясь методом Эйлера.

По методу Эйлера данный отрезок $[x_0, x_n]$ разбивается точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на n частичных отрезков.

На первом частичном отрезке $[x_0, x_1]$ искомая интегральная кривая, проходящая через известную точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется касательной к ней в точке M_0 :

$$y - y_0 = (x - x_0) y'(x_0, y_0),$$

откуда при $x = x_1$ получается приближенное значение y_1 искомого интеграла уравнения в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) y'(x_0, y_0) = y_0 + h_0 y'_0.$$

Далее, тем же способом для отрезка $[x_1, x_2]$ находим приближенное значение y_2 искомого интеграла в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) y'(x_1, y_1) = y_1 + h_1 y'_1.$$

Продолжая этот процесс, последовательно находим приближенные значения y_3, y_4, \dots, y_n искомого интеграла в точках x_3, x_4, \dots, x_n .

С увеличением n , при достаточно малой длине частичных отрезков, этим методом можно достигнуть заданной точности решения.

Обычно заданный отрезок $[x_0, x_n]$ делится на частичные отрезки одинаковой длины $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ и все последовательные приближенные значения y_1, y_2, \dots, y_n интеграла уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$,

вычисляются по рекуррентной формуле

$$y_k = y_{k-1} + hy'_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (*)$$

1186. Пользуясь методом Эйлера, составить таблицу приближенных значений частного интеграла уравнения $y' = y^2 - x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 1$, на отрезке $[1; 2]$, разбив его на 10 равных частей.

Решение. Определив длину каждого частичного отрезка (шаг таблицы) $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{2-1}{10} = 0,1$, находим точки $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; ..., разбивающие данный отрезок $[1; 2]$ на 10 равных частей.

Затем по заданным значениям $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ из данного уравнения $y' = y^2 - x^2$ находим $y'_0 = 0$ и по формуле (*) вычисляем $y_1 = y_0 + hy'_0 = 1$.

Зная x_1 и y_1 из данного уравнения находим $y'_1 = -0,210$ и по формуле (*) вычисляем $y_2 = y_1 + hy'_1 = 0,9790$.

Далее, исходя из значений x_2 , y_2 , вычисляем $y_3 = y_2 + hy'_2$, затем, зная x_3 , y_3 , вычисляем $y_4 = y_3 + hy'_3$ и т. д.

Результаты вычислений записываем в следующую таблицу:

k	x_k	y_k	y'_k	hy'_k
0	1	1	0	0
1	1,1	1	-0,210	-0,0210
2	1,2	0,9790	-0,4816	-0,0482
3	1,3	0,9308	-0,8236	-0,0824
4	1,4	0,8484	-1,2402	-0,1240
5	1,5	0,7244	-1,7252	-0,1725
6	1,6	0,5519	-2,2554	-0,2255
7	1,7	0,3264	-2,7834	-0,2783
8	1,8	0,0481	-3,2377	-0,3238
9	1,9	-0,2757	-3,5340	-0,3534
10	2,0	-3,8097		

Здесь столбцы x_k и y_k представляют искомую таблицу приближенных значений интеграла данного уравнения; остальные столбцы — вспомогательные.

В задачах 1187 — 1190 по методу Эйлера на указанном отрезке, разделяя его на 10 равных частей, составить таблицу приближенных значений интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию. Все вычисления вести с точностью до 0,001.

1187. $y' = x + y$; $y(-1) = 0$; $[-1; 0]$.

1188. $y' = 2x - y^2$; $y(0) = 0$; $[0; 1]$.

1189. $y' = y^3 - x$; $y(0) = 1$; $[0; 2]$.

1190*. $y' - 0,1y^2 = xy$; $y(1) = 0$; $[1; 2]$.