§ 12. Интегрирование уравнений при помощи рядов

Интеграл дифференциального уравнения не всегда можно выразить в элементарных функциях или посредством конечного числа квадратур (интегралов).

В большинстве случаев каждое дифференциальное уравнение определяет собой особую функцию, которую можно, вообще говоря, представить лишь в виде бесконечного функционального ряда.

Интегралы многих дифференциальных уравнений, общие или частные, могут быть представлены в виде степенного ряда, сходящегося в некотором интервале значений независимой переменной.

В таком случае ряд, являющийся интегралом уравнения, можно найти или методом неопределенных коэффициентов или методом, основанным на применении ряда Маклорена (Тейлора).

Эти методы нахождения ряда, являющегося интегралом данного уравнения, разъясняются в решениях следующих задач.

1191. Найти общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx}=y^2$ в виде степенного ряда.

Решение. Пусть искомый интеграл есть степенной ряд

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ неизвестные, подлежащие определению постоянные.

Допуская, что такой ряд существует и сходится в некотором интервале значений x, найдем ряд для $\frac{dy}{dx}$ его почленным дифференцированием

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

и ряд для y^2—почленным умножением ряда (1) самого на себя:

$$y^2=a_0^2+2a_0a_1x+2a_0a_2x^2+2a_0a_3x^3+\ldots+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+\ldots$$

Подставляя эти ряды вместо $\frac{dy}{dx}$ и y^2 в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, поскольку два ряда будут тождественно равны только при этом условии, получим следующую систему:

$$\begin{array}{r|l}
x^0 & a_1=a_0^2 \\
x^1 & 2a_2=2a_0a_1 \\
x^2 & 3a_3=2a_0a_2+a_1^2 \\
x^3 & 4a_4=2a_0a_3+2a_1a_2
\end{array}$$

. . . .

Решая эту систему, найдем: $a_1=a_0^2$; $a_2=a_0^3$; $a_3=a_0^4$; $\ldots$; $a_n=a_0^{n+1}$; $\ldots$

Следовательно, искомое разложение в степенной ряд общего интеграла данного уравнения есть

$$y = a_0(1 + a_0x + a_0^2x^2 + a_0^3x^3 + \ldots + a_0^nx^n + \ldots),$$

где a_0 является произвольной постоянной.

Полученный ряд представляет бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = a_0x$ и при $|q| < 1$ имеет сумму $y = \frac{a_0}{1-a_0x}$.

Решение этой задачи показывает достоверность метода интегрирования уравнений с помощью рядов, так как непосредственное интегрирование данного уравнения, как уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, дает тот же результат.

1192. Найти в виде степенного ряда частный интеграл уравнения $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, удовлетворяющий начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Полагая, что искомый интеграл представляет сходящийся степенной ряд (1), найдем ряды для y' и y'' его почленным дифференцированием

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$
$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1$; $y'(0) = a_1 = 0$.

Подставляя ряды для y, y' и y'' в заданное уравнение и сделав приведение подобных членов, получим

$$(1 + 2^2a_2) + 3^2a_3x + (a_2 + 4^2a_4)x^2 + (a_3 + 5^2a_5)x^3 + \ldots$$
$$\ldots + [a_n + (n+2)^2a_{n+2}]x^n + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты ряда, находящегося в левой части этого равенства, так как только при этом условии ряд будет тождественно равен нулю, получим систему $1 + 2^2a_2 = 0$; $3^2a_3 = 0$; $a_2 + 4^2a_4 = 0$; $a_3 + 5^2a_5 = 0$; $\ldots$; $a_n + (n+2)^2a_{n+2} = 0$; ..., из которой определяются следующие значения всех остальных коэффициентов: $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2m+1} = \ldots = 0$;

$$a_2 = -\frac{1}{2^2}; \quad a_4 = \frac{1}{2^24^2}; \quad a_6 = -\frac{1}{2^24^26^2}; \ \ldots;$$
$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^24^2\ldots(2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m(m!)^2}; \ \ldots$$

Таким образом, искомый частный интеграл данного уравнения есть степенной ряд

$$y = 1 - \frac{x^2}{4(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2(2!)^2} - \frac{x^6}{4^3(3!)^2} + \ldots + \frac{(-1)^mx^{2m}}{4^m(m!)^2} + \ldots,$$

который сходится при любом значении x (согласно признаку Даламбера, так как здесь абсолютная величина отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\frac{x^{2m+2}}{4^{m+1}[(m+1)!]^2}:\frac{x^{2m}}{4^m(m!)^2}=\frac{x^2}{4(m+1)^2}$$

при любом x и при неограниченном возрастании m стремится к нулю).

1193. Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y'+xy^2=2\cos x$, удовлетворяющего начальному условию: $y(0)=1$.

Решение. Как и в предыдущих задачах, ищем интеграл в виде степенного ряда (1).

Согласно начальному условию $y(0)=a_0=1$.

Далее, найдя ряды для y^2 и y' и подставляя их и ряд для $\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

в заданное уравнение, получим

$$a_1+(1+2a_2)x+(2a_1+3a_3)x^2+\ldots=2-x^2+\ldots$$

Отсюда путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x из обеих частей равенства найдем $a_1=2$; $a_2=-\frac{1}{2}$; $a_3=-\frac{5}{3}$.

Следовательно, искомый частный интеграл есть

$$y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\ldots$$

1194. Найти разложение в степенной ряд частного интеграла уравнения $y''+xy=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение. Пусть искомая функции $y(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2)$$

где величины $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ... являются значениями функции $y(x)$ и ее производных при $x=0$.

Два первых коэффициента $y(0)$ и $y'(0)$ даны в условии задачи, третий получим при подстановке известных величин в данное уравнение, $y''(0)=0$, а следующие коэффициенты найдем путем последовательного дифференцирования данного уравнения: $y'''=-(y+xy')$; $y^{(4)}=-(2y'+xy'')$; $y^{(5)}=-(3y''+xy''')$; ...; $y^{(n)}=-[(n-2)y^{(n-3)}+xy^{(n-2)}]$; ... Отсюда при $x=0$ получим: $y'''(0)=-1$; $y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0$; $y^{(6)}(0)=1\cdot 4$; $y^{(7)}(0)=y^{(8)}(0)=0$; $y^{(9)}(0)=-1\cdot 4\cdot 7$; ...

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд Маклорена (2), получим искомый частный интеграл в виде ряда

$$y=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots+(-1)^m\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3m-2)}{(3m)!}x^{3m}+\ldots,$$

который сходится при любом значении x.

1195. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y''-ye^x=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Решение. Применяя тот же способ, что и в решении предыдущей задачи, получим:

$$\begin{array}{ll} y''=ye^x, & y''(0)=2, \\ y^{(3)}=(y+y')e^x, & y^{(3)}(0)=3, \\ y^{(4)}=(y+2y'+y'')e^x, & y^{(4)}(0)=6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$$y=2+x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Этот второй способ определения коэффициентов степенного ряда, удовлетворяющего заданному дифференциальному уравнению, который основан на использовании ряда Маклорена*, в некоторых случаях требует меньшей вычислительной работы, чем метод неопределенных коэффициентов. Он применим для отыскания общего или частного интегралов уравнения, если оно разрешимо относительно производной высшего порядка и если путем его последовательного дифференцирования возможно получить производную любого порядка.

Интегрирование уравнений при помощи рядов имеет большое значение, однако следует иметь в виду, что не для всякого уравнения можно получить интеграл в виде пригодного степенного ряда.

Например, уравнение $x^2y'-y(x+1)=-x^2$ (линейное) имеет общий интеграл

$$y=\frac{x}{\sqrt[x]{e}}\left(c-\int\frac{\sqrt[x]{e}}{x}\,dx\right).$$

Однако предполагая, что существует интеграл в виде степенного ряда (1) и определив его коэффициенты, получим ряд

$$y=x^2(1+1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots),$$

который практически непригоден, так как он расходится при всяком значении x, отличном от нуля.

1196. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего ука-

---

* Или ряда Тейлора в более общем случае, когда ищется разложение интеграла по степеням двучлена $x-a$.

занному начальному условию:

1) $y'-y^2=x(x+1)$, $y(0)=1$; 2) $y'+y^2=e^x$, $y(0)=0$.

1197. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-y\cos x=x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;
2) $y''-y'\sin x+y=1$, $y(0)=y'(0)=1$.

1198. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-x^2y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
2) $y''+y\cos x=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

1199*. Найти разложение в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-xy=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
2) $xy''+2y'+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

§ 13. Системы линейных дифференциальных уравнений

Совокупность n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от одной независимой переменной x:

$$\begin{cases} y_1'+p_{11}y_1+p_{12}y_2+\ldots+p_{1n}y_n=q_1 \\ y_2'+p_{21}y_1+p_{22}y_2+\ldots+p_{2n}y_n=q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'+p_{n1}y_1+p_{n2}y_2+\ldots+p_{nn}y_n=q_n, \end{cases} \qquad (*)$$

где коэффициенты p_{ik} и правые части q_i — данные функции от x или постоянные, называется нормальной системой линейных дифференциальных уравнений.

Общим решением (или интегралом) такой системы называется совокупность n функций от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{gathered} y_1=y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2=y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{gathered} \qquad (**)$$

которые удовлетворяют всем уравнениям этой системы.

Интегрирование системы (*), путем исключения $n-1$ неизвестных функций (и их производных), как правило, можно