занному начальному условию:

1) $y'-y^2=x(x+1)$, $y(0)=1$; 2) $y'+y^2=e^x$, $y(0)=0$.

1197. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-y\cos x=x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;
2) $y''-y'\sin x+y=1$, $y(0)=y'(0)=1$.

1198. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-x^2y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
2) $y''+y\cos x=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

1199*. Найти разложение в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-xy=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
2) $xy''+2y'+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

§ 13. Системы линейных дифференциальных уравнений

Совокупность n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями y_1, y_2, ..., y_n от одной независимой переменной x:

$$\begin{cases} y_1'+p_{11}y_1+p_{12}y_2+\ldots+p_{1n}y_n=q_1 \\ y_2'+p_{21}y_1+p_{22}y_2+\ldots+p_{2n}y_n=q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'+p_{n1}y_1+p_{n2}y_2+\ldots+p_{nn}y_n=q_n, \end{cases} \qquad (*)$$

где коэффициенты p_{ik} и правые части q_i — данные функции от x или постоянные, называется нормальной системой линейных дифференциальных уравнений.

Общим решением (или интегралом) такой системы называется совокупность n функций от независимой переменной x и n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n

$$\begin{aligned} y_1&=y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2&=y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n&=y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned} \qquad (**)$$

которые удовлетворяют всем уравнениям этой системы.

Интегрирование системы (*), путем исключения $n-1$ неизвестных функций (и их производных), как правило, можно свести к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения n-го порядка относительно одной из неизвестных функций y_k:

$$y_k^{(n)}+P_1y_k^{(n-1)}+P_2y_k^{(n-2)}+\ldots+P_ny_k=Q.$$

Остальные $n-1$ неизвестные функции выражаются через общий интеграл этого уравнения посредством одних алгебраических действий и дифференцирования *.

Например, чтобы найти общее решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left\{\begin{aligned} &y'+a_1y+b_1z=q_1(x)\\ &z'+a_2y+b_2z=q_2(x),\end{aligned}\right. \tag{1}$$

где y и z — искомые функции от независимой переменной x; a_1, b_1, a_2, b_2 — известные постоянные; q_1, q_2 — известные функции от x, дифференцируем по x первое уравнение

$$y''+a_1y'+b_1z'=q_1' \tag{2}$$

и, исключая z и z' из трех уравнений (1) и (2), получим одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+ay'+by=q(x),$$
$$a=a_1+b_2,\quad b=a_1b_2-a_2b_1,\quad q=q_1'+b_2q_1-b_1q_2$$

и с одной неизвестной функцией y. Интегрируя это уравнение (см. § 8), найдем $y=F_1(x, C_1, C_2)$. Подставив найденное выражение функции y и ее производной y' в первое уравнение системы (1), найдем вторую искомую функцию $z=F_2(x, C_1, C_2)$. Совокупность функций y и z и будет общим решением системы (1).

Чтобы найти частное решение системы (*), удовлетворяющее заданным начальным условиям $y_1(x_0)=(y_1)_0$, $y_2(x_0)=(y_2)_0$, $\ldots$, $y_n(x_0)=(y_n)_0$ (задача Коши), следует из уравнений (**) определить соответствующие этим начальным условиям значения постоянных C_1, C_2, $\ldots$, C_n.

Системы, содержащие уравнения высших порядков, также можно решать путем сведения их к одному уравнению. Существуют и другие способы решения систем.

1200. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) $\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+2y-4z=0\\ &\frac{dz}{dx}+y-3z=3x^2;\end{aligned}\right.$ 2) $\left\{\begin{aligned} &6u'-u-7v+5w=10e^x\\ &2v'+u+v-w=0\\ &3w'-u+2v-w=e^x.\end{aligned}\right.$

* В исключительных случаях может получиться уравнение более низкого порядка, причем отыскание некоторых из остальных искомых функций требует нескольких дополнительных операций интегрирования.

Решение. 1) Дифференцируем по x первое уравнение:

$$y''+2y'-4z'=0,$$

затем исключаем z и z' из полученного уравнения и двух данных уравнений. В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y:

$$y''-y'-2y=12x^2.$$

Решая его как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), найдем

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-6x^2+6x-9.$$

Вторую неизвестную функцию z находим из первого уравнения данной системы, подставляя в него найденное выражение функции y и ее производной $y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}-12x+6$:

$$z=\frac{y'+2y}{4}=\frac{1}{4}C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-3x^2-3.$$

Совокупность двух найденных функций есть искомое общее решение данной системы.

2) Дифференцируем по x первое уравнение:

$$6u''-u'-7v'+5w'=10e^x$$

и заменяем в результате производные v' и w' их выражениями из второго и третьего уравнений:

$$36u''-6u'+31u+v-11w=50e^x. \qquad (\alpha)$$

Полученное уравнение опять дифференцируем по x:

$$36u'''-6u''+31u'+v'-11w'=50e^x$$

и опять заменяем в результате производные v' и w' указанными их выражениями:

$$216u'''-36u''+186u'-25u+41v-19w=322e^x. \qquad (\beta)$$

Далее из первого уравнения данной системы и уравнения (α) определяем v и w через x, u, u', u'':

$$v=\frac{5}{2}u''+\frac{1}{2}u'+2u-5e^x, \qquad w=\frac{7}{2}u''-\frac{1}{2}u'+3u-5e^x \qquad (\gamma)$$

и, внося их в уравнение (β), получим дифференциальное уравнение третьего порядка с одной неизвестной функцией u

$$u'''+u'=2e^x.$$

Интегрируя это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), находим

$$u=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x.$$

Подставляя найденное выражение функции u и ее производных u' и u'' в равенства (γ), находим две другие искомые функции:

$$v = 2C_1 + \frac{1}{2}(C_3 - C_2)\cos x - \frac{1}{2}(C_3 + C_2)\sin x,$$

$$w = 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos x + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\sin x + e^x.$$

В решении последней задачи показан общий способ приведения системы линейных дифференциальных уравнений к одному уравнению. Но во многих случаях это можно сделать проще.

1201. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t; \qquad \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(\pi) = 1$, $y(\pi) = 2$.

Решение. Сначала находим общее решение данной системы. Дифференцируем по t первое уравнение: $x'' + 2x' + y' = \cos t$ и, заменяя в результате производную y' ее выражение через t и x', определяемым из данной системы, получим уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией x:

$$x'' + 2\sin t = 0.$$

Решая его как простейшее уравнение высшего порядка путем двукратного интегрирования обеих частей (§ 6) или как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), найдем

$$x = C_1 t + C_2 + 2\sin t. \qquad (a)$$

Подставляя найденную функцию x и ее производную $x' = C_1 + 2\cos t$ в первое уравнение данной системы, найдем

$$y = -2C_2 - C_1(2t + 1) - 2\cos t - 3\sin t. \qquad (б)$$

Совокупность функций x и y есть общее решение данной системы.

Далее, исходя из заданных начальных условий, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Из первого условия: $x = 1$ при $t = \pi$ и равенства (a) имеем уравнение

$$1 = C_1\pi + C_2,$$

а из условия: $y = 2$ при $t = \pi$ и равенства (б) имеем второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2

$$2 = -2C_2 - C_1(1 + 2\pi) + 2.$$

Решая эти уравнения как систему, найдем: $C_1 = -2$, $C_2 = 1 + 2\pi$.

Наконец, подставляя эти значения C_1 и C_2 в общее решение, получим искомое частное решение данной системы, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$x=1-2(t-\pi)+2\sin t;\quad y=4(t-\pi)-2\cos t-3\sin t.$$

1202. Решить систему $y''-z=0$; $z'+8y=0$.

Решение. Дифференцируя первое уравнение, определяем z', и, подставляя ее во второе уравнение, получим $y'''+8y=0$. Отсюда находим (§ 7)

$$y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x).$$

Дважды дифференцируя y и подставляя в первое уравнение, находим

$$z=4C_1e^{-2x}+2e^x\left[(\sqrt{3}\,C_3-C_2)\cos\sqrt{3}\,x-(\sqrt{3}\,C_2+C_3)\sin\sqrt{3}\,x\right].$$

Решить систему уравнений:

1203. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+3z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+y=0.\end{cases}$ **1204.** $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}-2u-4v=\cos t,\\ \dfrac{dv}{dt}+u+2v=\sin t.\end{cases}$

1205. $\dfrac{du}{dx}+u-v-w=0$; $\dfrac{dv}{dx}-u+v-w=0$; $\dfrac{dw}{dx}-u-v-w=0$.

Найти частное решение системы уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

1206. $\dfrac{dx}{dt}+3x+y=0$, $\dfrac{dy}{dt}-x+y=0$; $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

1207. $\dfrac{du}{dx}+4v=\cos 2x$, $\dfrac{dv}{dx}+4u=\sin 2x$; $u(0)=0$, $v(0)=0{,}1$.

§ 14. Уравнения математической физики

Многие физические задачи сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые поэтому и называются уравнениями математической физики.

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, являются:

I. Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$,

представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и многие другие задачи о распространении колебаний в однородной среде.