Наконец, подставляя эти значения C_1 и C_2 в общее решение, получим искомое частное решение данной системы, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$x=1-2(t-\pi)+2\sin t;\quad y=4(t-\pi)-2\cos t-3\sin t.$$

1202. Решить систему $y''-z=0$; $z'+8y=0$.

Решение. Дифференцируя первое уравнение, определяем z', и, подставляя ее во второе уравнение, получим $y'''+8y=0$. Отсюда находим (§ 7)

$$y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x).$$

Дважды дифференцируя y и подставляя в первое уравнение, находим

$$z=4C_1e^{-2x}+2e^x\left[(\sqrt{3}\,C_3-C_2)\cos\sqrt{3}\,x-(\sqrt{3}\,C_2+C_3)\sin\sqrt{3}\,x\right].$$

Решить систему уравнений:

1203. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+3z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+y=0.\end{cases}$ **1204.** $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}-2u-4v=\cos t,\\ \dfrac{dv}{dt}+u+2v=\sin t.\end{cases}$

1205. $\dfrac{du}{dx}+u-v-w=0$; $\dfrac{dv}{dx}-u+v-w=0$; $\dfrac{dw}{dx}-u-v-w=0$.

Найти частное решение системы уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

1206. $\dfrac{dx}{dt}+3x+y=0$, $\dfrac{dy}{dt}-x+y=0$; $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

1207. $\dfrac{du}{dx}+4v=\cos 2x$, $\dfrac{dv}{dx}+4u=\sin 2x$; $u(0)=0$, $v(0)=0{,}1$.

§ 14. Уравнения математической физики

Многие физические задачи сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые поэтому и называются уравнениями математической физики.

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, являются:

I. Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$,

представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и многие другие задачи о распространении колебаний в однородной среде.

II. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка параболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о распространении тепла в однородной среде, о фильтрации жидкостей или газов и многие другие задачи.

III. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о свойствах стационарных электромагнитных полей, о стационарном распределении тепла в однородном теле, о потенциале скорости безвихревого течения жидкости и многие другие задачи о свойствах стационарных (установившихся) процессов.

Задача интегрирования уравнения с частными производными, т. е. задача отыскания функции, удовлетворяющей этому уравнению, имеет бесчисленное множество решений. Например, уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$, откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не зависит от y, а является некоторой произвольной (дифференцируемой) функцией только от одной переменной x, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}=f(x)$. Интегрируя это равенство по x, получим $u=F(x)+C$. Постоянная интегрирования C есть постоянная относительно x, но она может быть любой (дифференцируемой) функцией от y, т. е. $C=\varphi(y)$. Поэтому *общее решение данного уравнения с частными производными второго порядка содержит две произвольные функции*: $u=F(x)+\varphi(y)$. А подставляя вместо произвольных функций F и φ различные определенные функции, можно получить из этого общего решения бесчисленное множество различных частных решений данного уравнения:

$$u=x-2y+1;\quad u=x^3+\sin 3y;\quad u=7;\ \ldots$$

В конкретных задачах, сводящихся к уравнениям математической физики, *всегда ищется не общее, а частное решение* уравнения, удовлетворяющее некоторым определенным условиям, которые называются **краевыми условиями**.

Для решения уравнений математической физики обычно применяется **метод Фурье**:

Вначале ищутся частные решения данного уравнения в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента. Затем, исходя из заданных краевых условий, определяются значения произвольных постоянных, содержащихся в этих частных решениях. В результате искомое решение, удовлетворяющее и данному уравнению и данным краевым условиям, получается или в виде ряда, составленного из найденных частных решений, или в виде несобственного интеграла с бесконечными пределами. Этот метод разъясняется в решении следующих задач.

1208. Найти частное решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, удовлетворяющее краевым условиям:

1) $u(0, t) = 0$, 2) $u(l, t) = 0$,

3) $u(x, 0) = \varphi_1(x)$, 4) $u'_t(x, 0) = \varphi_2(x)$.

Решение. По методу Фурье вначале ищем частные решения данного уравнения в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от t:

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{1}$$

Найдя производные $u''_{xx} = TX''_{xx}$, $u''_{tt} = XT''_{tt}$ и подставив их в данное уравнение, получим

$$XT'' - a^2TX'' = 0, \quad \text{или} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T}.$$

В последнем равенстве переменные разделены. Левая его часть не зависит от t, а правая не зависит от x. Это возможно лишь в том случае, когда обе части равенства не зависят ни от t, ни от x, т. е. представляют одну и ту же постоянную. Обозначив эту постоянную через $-\lambda^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \text{и} \quad \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2, \tag{a}$$

или

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{и} \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Решая их как линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (§ 7), найдем

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x; \qquad T = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Подставляя эти выражения для X и T в равенство (1), получим

$$u(x, t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t). \tag{2}$$

Далее, исходя из данных краевых условий, определим значения постоянных. Подставляя в равенство (2) заданные значения $x = 0$, $u = 0$ (первое условие) и $x = l$, $u = 0$ (второе условие) и сократив на множитель $T(t) \neq 0$, получим

$$0 = A\cos 0 + B\sin 0, \quad 0 = A\cos\lambda l + B\sin\lambda l.$$

Из первого уравнения находим $A = 0$, а из второго следует $\sin\lambda l = 0$ (ибо $B \neq 0$ при $A = 0$), откуда определяется параметр

$\lambda=\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, который был также произвольным *.

Каждому значению λ (или n) соответствует частное решение вида

$$u_n=X_nT_n=\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{l}+\beta_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $\alpha_n=B_nC_n$, $\beta_n=B_nD_n$—произвольные постоянные.

Вследствие линейности и однородности заданного уравнения сумма его решений также будет его решением. Поэтому и сумма ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{l}+\beta_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

есть решение данного уравнения, удовлетворяющее условиям 1) и 2).

Для определения постоянных α_n и β_n используем два последних краевых условия. Подставляя в равенство (3) $t=0$, $u=\varphi_1(x)$ (третье условие), получим

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Дифференцируя по t решение (3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{an\pi}{l}\left(\beta_n\cos\frac{an\pi t}{l}-\alpha_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и подставляя в результат $t=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi_2(x)$ (четвертое условие), получим

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{an\pi}{l}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) представляют разложения заданных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в интервале $(0,\ l)$ в неполные ряды Фурье, содержащие только синусы. Коэффициенты таких разложений определяются по известной формуле, гл. IX, § 7:

$$\text{Если } f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ \text{то } b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{$*$}$$

* Если в равенствах (a) вместо $-\lambda^2$ взять $+\lambda^2$, то $X=Ae^{-\lambda x}+Be^{\lambda x}$, а для такого вида функции X выполнение условий 1) и 2) возможно лишь при $X\equiv 0$.

Согласно этой формуле

$$\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad \beta_n=\frac{2}{na\pi}\int_0^l \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6}$$

Следовательно, искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям, есть функция (3), где постоянные α_n и β_n определяются формулами (6).

Очевидно, что при различных исходных данных a, l, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ по формулам (6) будут получаться различные значения для α_n и β_n, а следовательно, и различные ряды (3) для функции $u(x, t)$, удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям.

Решению этой задачи можно дать, например, следующее физическое истолкование. Натянутая струна, закрепленная концами в точках $x=0$ и $x=l$ оси Ox, в начальный момент времени $t=0$ имела форму кривой $u=\varphi_1(x)$, а каждая ее точка с абсциссой x имела скорость $u'_t=\varphi_2(x)$; затем эта струна, предоставленная самой себе, колеблется, оставаясь в плоскости xOu. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. $\left(\text{Параметр } a^2=\frac{h}{\rho}\text{, где } h \text{ — натяжение, } \rho \text{ — плотность струны.}\right)$ Найденное его решение $u(x, t)$ определяет форму струны в любой момент времени t.

1209. Найти решение уравнения с частными производными $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям:

1) $u(0, t)=0$, 2) $u(l, t)=0$, 3) $u(x, 0)=\varphi(x)$.

Решение. Пользуясь методом Фурье, полагаем

$$u(x, t)=X(x)T(t).$$

Тогда заданное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2$$

и распадается на два уравнения

$$X''+\lambda^2X=0 \quad\text{и}\quad T'+a^2\lambda^2T=0,$$

решая которые, найдем

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,\quad T=Ce^{-a^2\lambda^2t},$$
$$u(x, t)=e^{-a^2\lambda^2t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x),$$

где $\alpha=AC$ и $\beta=BC$ — произвольные постоянные.

Используя первое условие: $u=0$ при $x=0$ и второе условие: $u=0$ при $x=l$, получим

$$0=\alpha\cos 0+\beta\sin 0, \quad 0=\alpha\cos\lambda l+\beta\sin\lambda l,$$

откуда следует: $\alpha=0$, $\lambda=\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Как и в решении предыдущей задачи, каждому значению $\lambda(n)$ соответствует частное решение

$$u_n=\beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

сумма которых $u(x, t)$ также будет решением данного уравнения

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{7}$$

Используя третье условие: $u=\varphi(x)$ при $t=0$, получим для определения β_n равенство

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Это равенство есть разложение в интервале $(0, l)$ данной функции $\varphi(x)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы. Поэтому согласно формуле (*)

$$\beta_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{8}$$

Таким образом, сумма ряда (7), коэффициенты которого определяются формулами (8), есть частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данным краевым условиям.

Решенная задача может иметь такой физический смысл.

Однородный стержень длины l, имеющий теплонепроницаемую боковую поверхность, расположен между точками $x=0$ и $x=l$ оси Ox; на его концах поддерживается постоянная температура $u=0$ и в начальный момент $t=0$ распределение температуры вдоль стержня есть известная функция $u=\varphi(x)$. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение распространения тепла в стержне $\left(\text{параметр } a^2=\frac{k}{c\rho}\text{, где } k\text{—коэффициент теплопроводности, } c\text{—теплоемкость, } \rho\text{—плотность стержня}\right)$, а полученное его решение $u(x, t)$ определяет распределение температуры вдоль стержня в любой момент времени t.

Распространению тепла в стержне неограниченной длины (бесконечного в обе стороны) соответствует то же дифференциальное уравнение (II) и единственное начальное условие: $u(x, 0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<+\infty$, определяющее распределение температуры u вдоль этого стержня в начальный момент $t=0$.

По методу Фурье, полагая $u=X(x)T(t)$, и в этой задаче получаем частные решения вида

$$u=e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x). \qquad (9)$$

Но здесь параметр λ является совершенно произвольным, ибо нет никаких оснований (условий) для выбора каких-то определенных его значений. Здесь, в формуле (9), λ может иметь любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому здесь решением будет не сумма ряда, составленного из частных решений, как это было в предыдущих задачах, а несобственный интеграл по параметру λ:

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)\,d\lambda. \qquad (10)$$

Для определения коэффициентов α и β используем заданное условие $u(x, 0)=\varphi(x)$, — подставляем $t=0$, $u=\varphi(x)$ в последнее равенство:

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Сопоставляя полученное равенство с формулой Фурье (гл. IX, § 8) для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\cos\lambda z\,dz\right]\cos\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\sin\lambda z\,dz\right]\sin\lambda x\right\}d\lambda,$$

находим для α и β следующие выражения:

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\cos\lambda z\,dz, \quad \beta(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\sin\lambda z\,dz. \qquad (11)$$

Итак, искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, или решение задачи о распространении тепла в бесконечном стержне, получено здесь в виде несобственного интеграла (10), где α и β определяются формулами (11).

Найти частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям:

1210. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; $\quad u(0,\ t) = 0, \quad u'_x(l,\ t) = 0,$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,\ 0) = 0.$$

1211. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(0,\ t) = 0,\ \ u(x,\ 0) = \varphi(x),$

$$0 \leqslant x < +\infty,\ \ t \geqslant 0.$$

1212. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $\quad u(0,\ y) = 0,\ \ u(a,\ y) = 0,$

$$u(x,\ 0) = \varphi_1(x), \quad u(x,\ b) = \varphi_2(x).$$