Глава I
Основные понятия

В этой главе рассматриваются понятия инерциальной системы отсчёта, свободной и несвободной системы материальных точек, связей и их классификации, виртуальной скорости, виртуального перемещения и виртуальной работы, обобщённых координат и обобщённых сил. Для каждого понятия решается соответствующая ему задача. Некоторые понятия определяются в ходе решения задач.

§1.1 Пространство и время, инерциальная система отсчёта, принцип относительности Галилея

Все процессы, рассматриваемые в физике, происходят в пространстве и во времени, свойства которых накладывают определённые ограничения на протекающие в них процессы.

В дальнейшем мы будем считать, что все механические процессы происходят в пространстве, свойства которого подчиняются законам геометрии Евклида и не зависят от присутствия в нём материальных тел. Все точки такого пространства совершенно равнозначны (пространство *однородно*) и можно говорить лишь об относительном положении и об относительном движении материальных тел в пространстве. В таком пространстве отсутствуют и какие-либо выделенные направления (пространство *изотропно*).

Однородность и изотропность пространства с точки зрения математики означает, что в пространстве возможны параллельные переносы и повороты, не меняющие законов движения.

Однородность времени означает, что мы можем произвольно выбирать начальный момент времени, то есть момент, с которого начинается отсчёт времени.

Как уже отмечалось выше, положения и движение материальных тел в пространстве относительны и, следовательно, для изучения законов движения нам необходимо договориться, относительно чего мы будем рассматривать изучаемые нами движения материальных тел. Для решения поставленной задачи нам необходимо задать *тело отсчёта*, *систему координат*, (начало которой совместим с телом отсчёта), *масштабы* и *часы*. Всё перечисленное выше составляет понятие *системы отсчёта*. Системы отсчета, в которых выполняются законы Ньютона, мы будем называть *инерциальными системами отсчёта* (ИСО).

Так как все ИСО эквивалентны, мы не можем выделить из этого множества какую-то привилегированную ИСО, «абсолютную» систему отсчёта.

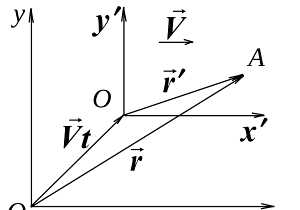

Рис. 1.

Рассмотрим две ИСО C и C'. Пусть C' движется относительно C со скоростью $\vec{V}$, а координаты некоторой точки А определяются с помощью соответствующих радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}'$.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t\,, \qquad (1.1.1)$$

$$t = t'\,. \qquad (1.1.2)$$

Ход времени во всех ИСО одинаков. Время носит абсолютный характер. Формулы (1.1.1) и (1.1.2) называются уравнениями *преобразования координат и времени Галилея*. Принцип относительности Галилея заключается в требовании инвариантности уравнений движения механики по отношению к этим преобразованиям.

Абсолютность времени, и принцип относительности Галилея устанавливают существование *бесконечно большой скорости распространения взаимодействия*[1] между телами. Если взаимодействие будет передаваться с конечной скоростью, то она будет различной в различных ИСО, согласно правилу сложения скоростей. Законы движения взаимодействующих тел будут различны в различных ИСО, что противоречит принципу относительности Галилея.

[1] Здесь имеется в виду, что в механике Ньютона скорость света не имеет предельного значения как в СТО, а гравитационное взаимодействие передаётся мгновенно.

§1.2 Свободные и несвободные системы материальных точек

Одним из важнейших понятий механики является понятие материальной точки (частицы). *Материальной точкой* (частицей) считают тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения, то есть размеры тела должны быть много меньше расстояния между телами в конкретной задаче. Космический аппарат на орбите Земли или совершающий полёт в солнечной системе можно рассматривать как материальную точку. Изучая взаимные расположения звёзд, их так же можно считать материальными точками, так как расстояния между звёздами намного превышают размеры самих звёзд.

Совокупность материальных точек называется *системой материальных точек*, если движение каждой из них в отдельности зависит от движения и положения остальных точек. Это означает, что между точками материальной системы существуют силы взаимодействия.

Силы взаимодействия между точками материальной системы называются *внутренними силами*.

Силы, действующие на точки материальной системы со стороны точек и тел, не принадлежащих данной материальной системе, называются *внешними силами*.[1]

Материальная система точек, в которой расстояние между двумя любыми её точками не изменяется, называется *абсолютно твёрдым телом*.

Если любая произвольно выбранная точка материальной системы может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую систему материальных точек называют *свободной*.

Система материальных точек называется *несвободной*, если из-за каких либо ограничений (условий) точки материальной системы не могут занять произвольного положения в пространстве и не могут иметь произвольные скорости.

[1] Здесь мы предполагаем, что все действующие на точки материальной системы силы, есть либо заданные силы, либо реакции связи. Данное определение материальной системы не включает в себя силы трения, которая не является ни внутренней силой, ни силой реакции, определение которой будет дано позже.

§1.3. Связи и их классификация

Ограничения (условия), которые не позволяют системе материальных точек занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости называют *связями*.

Связь налагает ограничение на изменение координат и скоростей точек. Математически ограничения записываются в виде уравнений или неравенств.

Пусть система состоит из n материальных точек, а декартовы координаты i-й точки будут x_i, y_i, z_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$. Предположим, что на систему материальных точек наложена одна связь, которую можно математически представить с помощью некоторой функции f. Тогда для этой функции $f \in C_1$ в области D это можно написать[1]:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \le 0. \quad (1.3.1)$$

Если в уравнении (1.3.1) стоит знак «равно» – связь называется *удерживающей*, если стоит знак неравенства, то связь называется *неудерживающей*.

Решим несколько задач на составление уравнений связи. Отметим, что в ходе решения некоторых задач, мы будем попутно давать определения для впервые встречающихся понятий, которые будем выделять курсивом.

Задача 1.

Составить уравнение связи для двух точек М1 и М2 с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, связанных между собой: а) жестким стержнем длиной l, б) гибкой нерастяжимой нитью длиной l, в) негибким стержнем, изменяющим свою длину l заданным образом $l = l_1 + l_0 \sin t$.

---

[1] Мы будем говорить, что функция одной или нескольких переменных принадлежит классу C_p в области изменения независимых переменных D, если все её производные порядка p существуют и непрерывны в D, $\in$ - знак принадлежности.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t\right)$
Дано	M1(x_1, y_1, z_1), M2(x_2, y_2, z_2), а) l (жесткий стержень), б) l (гибкая, нерастяжимая нить), в) $l = l_1 + l_0 \sin t$.

Решение задачи.

В случаях а) и б) данной задачи точки M1 и M2 могут занимать любые положения в пространстве и иметь любые скорости, расстояние между точками не зависит от времени и от выбора ИСО. В случае, когда нам нет необходимости связывать ИСО с системой материальных точек или какой либо её частью, мы можем связать ИСО с лабораторией и будем называть такую ИСО *лабораторной* .

Для случая а) (рис.2а) уравнение (1.3.1) будет выглядеть так:

$$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 - l^2 = 0 .$$

Расстояние между данными точками неизменно, связь является удерживающей.

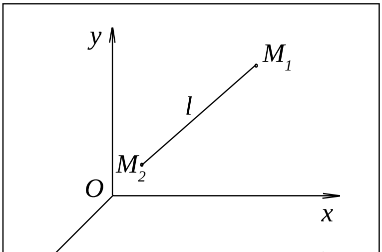

Рис. 2а.

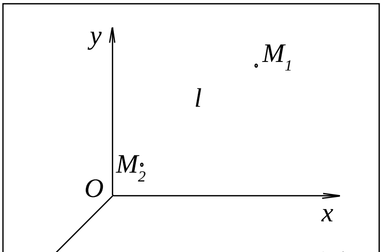

Рис. 2б.

Для случая б) (рис 2б) уравнение (1.3.1) будет выглядеть так:

$$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 - l^2 \le 0 .$$

Связь в данном примере *неудерживающая*.

Если уравнение удерживающей связи

$$f\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\right) = 0 \qquad (1.3.2)$$

содержит явно время t, то связь называется *нестационарной* или *кинематической*.

В случае в) данной задачи мы можем снова воспользоваться лабораторной ИСО, уравнение связи (1.3.1) будет явно содержать время t:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin t)^2 = 0 .$$

Если уравнение связи не содержит времени t, то есть уравнение связи имеет вид

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 , \qquad (1.3.3)$$

связь называется *стационарной*.

Связь, накладывающая ограничения только на координаты точек системы, то есть связь, уравнение которой не содержит производных по времени от координат:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (1.3.4)$$

называется геометрической или ***голономной***.

Если уравнение (1.3.2*) кинематической связи путём интегрирования нельзя привести к виду* (1.3.4), *не содержащему производных по времени, то эта связь называется неинтегрируемой или* ***неголономной***.

Если уравнение кинематической связи (1.3.2) можно путём интегрирования привести к виду (1.3.4), то связь, по существу, будет *голономной*.

Рассмотрим задачу с использованием голономной связи.

Задача 2.

Проинтегрировать уравнение связи $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i) = 0$, наложенной на систему материальных точек.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	I (искомый интеграл)
Дано	$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i) = 0$

Решение задачи.

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{dx_i}{dt} + y_i\frac{dy_i}{dt} + z_i\frac{dz_i}{dt}\right) = 0\,.$$

Умножим выражение стоящее в скобках на dt

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{dx_i}{dt} + y_i\frac{dy_i}{dt} + z_i\frac{dz_i}{dt}\right)\cdot dt = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i dx_i + y_i dy_i + z_i dz_i\right) = 0\,.$$

Интегрирование последнего выражения не представляет труда

$$I = \int\sum_{i=1}^{n}\left(x_i dx_i + y_i dy_i + z_i dz_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{2}y_i^2 + \frac{1}{2}z_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) = Const\,.$$

Данная связь является *геометрической* или *голономной*.

Если на систему материальных точек наложено k связей, мы будем иметь k уравнений связи следующего вида:

$$f_j\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\right) = 0\,,\ \left(j = 1,2,\ldots,k\right),\ \left(i = 1,2,\ldots,n\right). \qquad (1.3.5)$$

Если эта система уравнений интегрируема, то связи будут *голономными*, в противоположном случае – *неголономными*.

Система материальных точек, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*, а система материальных точек с неголономными связями – *неголономной*.

Голономная система материальных точек, на которую наложены k связей, удовлетворяет следующей системе уравнений

$$f_j\left(x_i, y_i, z_i, t\right) = 0\,,\ \left(j = 1,2,\ldots,k\right). \qquad (1.3.6)$$

Система материальных точек, на которую наложены стационарные (не зависящие от времени) связи, часто называют *натуральной* системой материальных точек.

Рассмотрим задачу на составление нескольких уравнений связи.

Задача 3.

Точка M1, к которой присоединена с помощью жесткого стержня длины l точка M2, движется по дуге окружности радиуса R, расположенной в вертикальной плоскости. Составить уравнения связей.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$
Дано	M1(x_1, y_1, z_1), M2(x_2, y_2, z_2), l (жесткий стержень), R

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, совместив начало системы координат с центром окружности. Сделаем чертёж.

Точка M1 движется в плоскости xOy, а у точки M2 могут меняться все три её координаты x_2, y_2, z_2, так как по условию задачи только точка M1 движется по дуге окружности, расположенной в вертикальной плоскости.

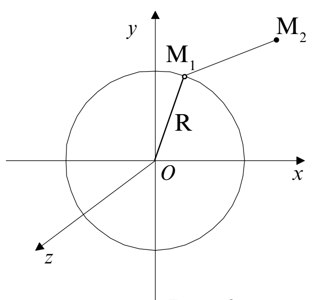

Рис. 3.

Составим уравнения связей: так как движение точки M1 происходит по окружности в плоскости xOy, мы можем сразу написать:

$$z_1 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Третье уравнение связи нами получено в задаче 1 (а).

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z_2{}^2 - l^2 = 0.$$

Система имеет три голономные связи типа (1.3.6).

Задача 4.

Написать уравнения связей для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис. 4.

Запишем условие задачи кратко.

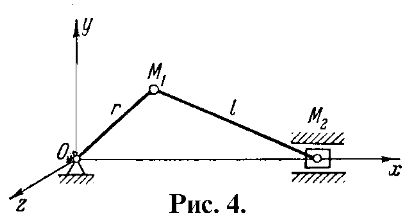

Рис. 4.

Найти	$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$
Дано	M1(x_1, y_1, z_1), M2(x_2), l , r

Решение задачи.

Свяжем ИСО с кривошипно-шатунным механизмом, совместив начало системы координат с точкой O. Напишем уравнения связей:

M1: $z_1 = 0$, $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$;

M2: $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$.

Система имеет пять голономных связей.

Числом степеней свободы голономной системы материальных точек называется число независимых параметров, полностью определяющих её положение (конфигурацию), то есть определяющих положение каждой точки системы.

Пусть на систему материальных точек, состоящую из n точек, наложено k связей типа (1.3.6). Тогда не все декартовы координаты точек системы независимы друг от друга, то есть на $3n$ координат наложено k независимых уравнений связи. Решая эти уравнения связей относительно k каких либо координат, мы выразим эти k координат через остальные $3n - k$. Эти $3n - k$ координат, которые могут принимать произвольные значения, и определяют положение системы материальных точек.

Таким образом, число степеней свободы будет равно

$$s = 3n - k\,. \tag{1.3.7}$$

§1.4. Виртуальные скорости, виртуальные перемещения

Виртуальные скорости и *виртуальные перемещения* являются одними из важнейших понятий механики.

Предположим, что на материальную точку наложена связь вида

$$f(x, y, z, t) = 0\,. \tag{1.4.1}$$

Закон движения материальной точки, обусловленный действующими на точку силами, будет

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{1.4.2}$$

Подставив (1.4.2) в уравнение связи (1.4.1), получим

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0\,. \tag{1.4.3}$$

Дифференцируя полученное уравнение по времени t, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \tag{1.4.4}$$

Пусть в момент времени $t = t_0$ материальная точка имеет координаты x_0, y_0, z_0.

Для этого момента времени (1.4.4) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cdot \dot{z} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0\,. \tag{1.4.5}$$

Здесь индекс 0 означает, что все четыре производные вычислены для значений x_0, y_0, z_0 и t_0. Производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в (1.4.5) также соответствуют моменту времени $t = t_0$. Уравнение (1.4.5) есть условие, которому должны удовлетворять в *данный момент времени* $t = t_0$ проекции $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$ скорости материальной точки

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\,. \tag{1.4.6}$$

Эту скорость называют *действительной* скоростью.

Для стационарной связи, описываемой уравнением вида

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1.4.7}$$

условие (1.4.5) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cdot \dot{z} = 0\,. \tag{1.4.8}$$

Введём с помощью уравнения

$$\vec{v}^{\,*} = \dot{x}^*\vec{i} + \dot{y}^*\vec{j} + \dot{z}^*\vec{k} \tag{1.4.9}$$

скорость, проекции которой в *данный фиксированный момент времени* $t = t_0$ удовлетворяют уравнению (1.4.8), то есть тому же условию, которому удовлетворяют проекции действительной скорости при стационарной связи. Следовательно, если связь нестационарная, то введённая нами скорость $\vec{v}^{\,*}$ представляет собой в *данный момент времени* кинематически возможную скорость материальной точки при *мгновенно остановленной связи* в момент времени $t = t_0$, то есть $\vec{v}^{\,*}$ - это скорость, совместимая со связью, но не имеющая составляющих, обусловленных деформацией связи.

Скорость $\vec{v}^{\,*}$ будем называть *виртуальной* скоростью.

Рассмотрим, для примера, движение материальной точки по поверхности, которая в свою очередь движется в пространстве с некоторой скоростью $\vec{v}\,'$. Действительная скорость материальной точки $\vec{v}$ будет суммой двух составляющих: составляющей $\vec{v}^{\,*}$, расположенной в касательной плоскости, проведённой к точке поверхности, где находится в данный момент материальная точка и определяемой уравнением

(1.4.9), и составляющей $\vec{v}'$, обусловленной перемещением поверхности. Виртуальные же скорости будут расположены только в касательной плоскости.

Из сравнения условий (1.4.5) и (1.4.8) вытекает, что в случае нестационарной связи действительные скорости в общем случае не совпадают с виртуальными скоростями. Если связь стационарная – действительная скорость совпадает с одной из виртуальных скоростей.

Решим задачу с применением понятия виртуальной скорости.

Задача 5.

Составить уравнение (1.4.4) для материальной системы, заданной в задаче 1(а).

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0$
Дано	М1(x_1, y_1, z_1), М2(x_2, y_2, z_2), l (жесткий стержень)

Решение задачи.

Будем решать задачу в лабораторной ИСО. Пусть $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ радиус-векторы материальных точек М1 и М2 соответственно. Воспользуемся уравнением связи, полученным в результате решения задачи 1(а)

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x_2 - x_1),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y_2 - y_1),\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2(z_2 - z_1) \ \text{ и } \ \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\dot{x}^* = \dot{x}_2^* - \dot{x}_1^*,\ \dot{y}^* = \dot{y}_2^* - \dot{y}_1^*,\ \dot{z}^* = \dot{z}_2^* - \dot{z}_1^*,$$

тогда для (1.4.4) можно написать

$$(x_2 - x_1)(\dot{x}_2^* - \dot{x}_1^*) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2^* - \dot{y}_1^*) + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2^* - \dot{z}_1^*) = 0$$

или в векторной форме:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*) = 0\,, \qquad (1.4.10)$$

откуда немедленно следует, что *разность виртуальных скоростей двух материальных точек твёрдого тела всегда перпендикулярна к прямой, соединяющей эти точки*, так как в левой части (1.4.10) стоит скалярное произведение векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$.

Действительным перемещением материальной точки называется вектор

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt\,. \qquad (1.4.11)$$

Проекции этого вектора $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0\,, \qquad (1.4.12)$$

которое получается из уравнения (1.4.4)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (1.4.4)$$

умножением его на dt.

Действительным перемещением системы материальных точек называются векторы

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = \dot{x}_i dt\vec{i} + \dot{y}dt\vec{j} + \dot{z}dt\vec{k}\,,\ (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.4.13)$$

Пусть некоторая материальная точка А с координатами x, y, z находится на поверхности $f(x, y, z, t) = 0$. Положение материальной точки А в *фиксированный момент времени* определяется радиус-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Рассмотрим теперь множество бесконечно близких положений материальной точки А, допускаемых связью в этот *фиксированный момент времени*.

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r} = (x + \delta x)\vec{i} + (y + \delta y)\vec{j} + (z + \delta z)\vec{k}\ .$$

Вектор $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ есть бесконечно малое приращение радиус-вектора $\vec{r}(t)$ при мысленном перемещении материальной точки из положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}(t)$, в положение, определяемое радиус-вектором $\vec{r}'(t)$.

Вектор $\delta\vec{r}$ называется *вектором виртуального перемещения*. Вектор виртуального перемещения есть бесконечно малый вектор, который позволяет мысленно, не нарушая связи, перевести материальную точку из одного её положения в бесконечно близкое, относящееся *к тому же моменту времени* t_0.

Вектор $\delta\vec{r}$ иначе называется вариацией вектора $\vec{r}$, а его проекции δx, δy, δz - вариациями координат. Проекции $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ векторов $\vec{r}'(t)$ должны удовлетворять уравнению связи (1.3.4) $f(x, y, z, t) = 0$, то есть $f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0$.

Разлагая это выражение в ряд по степеням δx, δy, δz, учитывая, что $f(x, y, z, t) = 0$, и пренебрегая членами малости высшего порядка, получим условие, накладывающее ограничение на вариации координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0\,. \tag{1.4.14}$$

Так как время в (1.4.14) считается фиксированным, вариации δx, δy, δz называются *изохронными*.

Если связь, которой подчинено движение материальной точки, стационарная, то проекции (dx, dy, dz) действительного перемещения $d\vec{r}$ удовлетворяют уравнению $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$, то есть вектор действительного перемещения совпадает с одним из виртуальных перемещений.

Виртуальными перемещениями системы материальных точек, подчинённой k связям вида

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = o\,,\ (j = 1,2,\ldots,k),\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

называют совокупность векторов

$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k}\,, \qquad (1.4.15)$$

проекции которых удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0\,,\ (j = 1,2,\ldots,k). \qquad (1.4.16)$$

При стационарных связях проекции действительных перемещений удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right) = 0\,, \qquad (1.4.17)$$

$$(j = 1,2,\ldots,k).$$

Это значит, что для стационарных связей действительные перемещения совпадают с одним из виртуальных перемещений.

§1.5. Виртуальная работа, признак идеальности связей

Предположим, что на систему материальных точек, находящуюся *в определённом положении в фиксированный момент времени,* действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ и виртуальные перемещения системы материальных точек равны $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_n$.

Виртуальной работой называется работа сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ на виртуальных перемещениях $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_n$ системы, то есть

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \qquad (1.5.1)$$

или

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right) \qquad (1.5.2)$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i - составляющие заданных сил вдоль соответствующих осей. В общем случае эти составляющие есть известные функции семи переменных: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$. Они определены в некоторой области D семимерного пространства $\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)$. Чаще всего функции X, Y, Z зависят лишь $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а в некоторых специфических задачах эти функции зависят лишь от трёх переменных x, y, z . В таком случае говорят о движении системы материальных точек в *силовом поле*.

Идеальными связями называются такие связи, для которых виртуальная работа реакций связи на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \qquad (1.5.3)$$

где $\vec{R}_i$ - реакция связи, приложенная к i - й точке.

В курсе теоретической механики идеальная связь определяется как связь, реакция которой не содержит составляющей, обусловленной трением. (Частный случай (1.5.3)).

Решим задачу на использование идеальной связи.

Задача 6.

Материальные точки M1 и M2 соединены между собой абсолютно жестким стержнем (см. задачу 1(а)). Исследовать условие идеальности связей, приложенных к данным материальным точкам.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	δA
Дано	M1(x_1, y_1, z_1), M2(x_2, y_2, z_2), l (жесткий стержень)

Решение задачи.

Будем решать задачу в лабораторной ИСО.

Пусть положения материальных точек M1 и M2 определяются радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Реакции связей, приложенных к точкам M1 и M2, обозначим соответственно через $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, причём, в соответствии с III законом Ньютона, $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$. Предположим, далее, что материальная точка M1 имеет виртуальную скорость $\vec{v}_1^{\,*}$, а материальная точка M2 имеет виртуальную скорость $\vec{v}_2^{\,*}$. Тогда для виртуальных перемещений $\delta\vec{r}_1$ и $\delta\vec{r}_2$ материальных точек M1 и M2 можно написать:

$$\delta\vec{r}_1 = \vec{v}_1^{\,*}\tau\ ,\ \ \delta\vec{r}_2 = \vec{v}_2^{\,*}\tau\ .$$

Составим уравнение (1.5.3)

$$\vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 - \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 \cdot \left(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2\right) =$$
$$= \vec{R}_1 \cdot \left(\vec{v}_1^{\,*} - \vec{v}_2^{\,*}\right)\tau = 0\ .$$

Так как время τ может быть выбрано отличным от нуля, мы можем написать

$$\vec{R}_1 \cdot \left(\vec{v}_1^{\,*} - \vec{v}_2^{\,*}\right) = 0\ .$$

Отсюда немедленно следует (уравнение (1.4.10), что разность виртуальных скоростей $\vec{v}_1^{\,*} - \vec{v}_2^{\,*}$ перпендикулярна к вектору реакции $\vec{R}_1$, как и к направлению стержня, соединяющего материальные точки M1 и M2.

Связь, наложенная на материальные точки M1 и M2, – *идеальна*.

Рассмотрим три задачи, позволяющие рассмотреть законы движения материальной точки под действием различных связей. Задача 9 является обобщением задач 7 и 8.

Задача 7

Материальная точка под действием некоторой *заданной* (внутренней) силы $\vec{F}$ движется по заданной гладкой[1] поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ так, что материальная точка не может покинуть поверхность. Определить законы движения материальной точки.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0$
Дано	$\vec{F}$, $\varphi(x, y, z) = 0$

Решение задачи.

Свяжем ИСО с заданной поверхностью. Выразим заданную силу $\vec{F}$ через её составляющие: $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

Так как материальная частица движется по гладкой поверхности и не может её покинуть, мы будем считать, что на материальную частицу наложена *двухсторонняя* (*неосвобождающая*) связь, уравнение которой выражается равенством $\varphi(x, y, z) = 0$, $\varphi \in C_2$. (При о*дносторонней* (*освобождающей*) связи, материальная точка может покинуть поверхность, условие связи выражается неравенством).

Так как материальная точка всё время находиться на заданной поверхности, её координаты в любой момент времени удовлетворяют уравнению поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{1.5.4}$$

Дифференцируя (1.5.4) по времени, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0, \tag{1.5.5}$$

где коэффициенты $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ есть заданные функции переменных x, y, z класса C_1.

[1] Поверхность считается гладкой, если движение по ней осуществляется без трения.

Уравнение (1.5.5) можно переписать (см. задачу 2) иначе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0\,. \tag{1.5.6}$$

Уравнение (1.5.6) задаёт связь между дифференциалами возможного бесконечно малого перемещения dx, dy, dz материальной точки.

Все три уравнения (1.5.4), (1.5.5) и (1.5.6) называются *уравнениями связи*, причём, уравнение (1.5.6) в точности эквивалентно уравнению (1.5.5). Уравнения типа (1.5.6) будем называть в дальнейшем уравнением *Пфаффа* (см. Приложение I п. 2).

Отметим, что уравнение связи (1.5.5) справедливо при всех возможных составляющих скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, которые может иметь материальная точка, так как материальная точка может начать движение из точки x, y, z с любой скоростью, удовлетворяющей уравнению связи. Если условия задачи конкретизированы, то у материальной точки при прохождении через координату x, y, z в момент времени t одна из скоростей будет совпадать с действительной скоростью, хотя уравнение связи будет удовлетворять всем скоростям, которые материальная точка могла бы иметь.

Совокупность перемещений dx, dy, dz, которые материальная точка может совершить за время dt, при движении из точки x, y, z, назовём *возможными перемещениями*, среди которых будет перемещение, совершенное материальной точкой в действительности за время dt.

Рассмотрим более подробно, как осуществляется действительное движение под действием связи. Со стороны поверхности, по которой движется материальная точка, действует дополнительная сила, которую мы назовём *реакцией связи* (реакцией поверхности). Эта сила направлена по нормали к поверхности (поверхность гладкая, нет силы трения). Поверхность может создавать нормальную реакцию любой величины и знака, такую, что материальная точка, двигаясь под действием обеих приложенных к ней сил (*заданной силы* $\vec{F}$ и *реакции связи*), будет всё время оставаться на поверхности.

Общим для реакций связи требованием является принцип виртуальной работы (1.5.3), реакция связи не совершает работы на любом возможном перемещении. Покажем это. Обозначим составляющие силы реакции $\vec{F}'$ через X', Y', Z', тогда учитывая перпендикулярность силы реакции $\vec{F}'$ к поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ в точке x, y, z, мы можем написать (уравнение нормали)

$$\frac{X'}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{Y'}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{Z'}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}. \tag{1.5.7}$$

Перепишем (1.5.7) следующим образом

$$\frac{X'}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{Y'}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{Z'}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \lambda, \tag{1.5.8}$$

где λ - некоторое число. Из (1.5.8) следует, что

$$X' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ Y' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ Z' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1.5.9}$$

Подставив эти значения в (1.5.6) и сократив на λ получим

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = 0. \tag{1.5.10}$$

Уравнение (1.5.10) показывает, что работа, совершаемая реакцией связи на возможных перемещениях, равна нулю.

В данной задаче каждая из действующих сил принадлежит к одному из двух классов: *классу заданных сил* (сила $\vec{F}$) и *классу реакций связи* (реакция поверхности), которые в теоретической механике принято разделять на *внутренние* и *внешние* силы.

Задача 8.

Материальная точка под действием некоторой *заданной* силы $\vec{F}$ движется по заданной изменяющейся во времени гладкой поверхности $\psi(x, y, z, t) = 0$, $\psi \in C_2$ так, что материальная точка не может покинуть поверхность. Определить законы движения материальной точки.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)=0$
Дано	$\vec{F}$, $\psi\left(x, y, z, t\right)=0$

Решение задачи.

Свяжем ИСО с «Лабораторией». Аналогами уравнений (1.5.4), (1.5.5) и (1.5.6) будут, соответственно уравнения

$$\psi\left(x, y, z, t\right)=0\,, \tag{1.5.11}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial t}=0\,, \tag{1.5.12}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz+\frac{\partial\psi}{\partial t}dt=0\,. \tag{1.5.13}$$

Полученные уравнения коренным образом отличаются от соответствующих уравнений задачи 8. Во первых – коэффициенты новых уравнений зависят от x, y, z, t , в то время как в задаче 8 они зависели лишь от x, y, z . Фундаментальное различие между (1.5.5) и (1.5.12) состоит в том, что первое есть *однородное* линейное уравнение, связывающее составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, тогда как второе уравнение *не является однородным*. Уравнение (1.5.13) отличается от уравнения (1.5.6) наличием слагаемого, содержащего dt .

Так как реакция связи по-прежнему нормальна к поверхности, то аналогом уравнения (1.5.7) будет

$$\frac{X'}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}=\frac{Y'}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}=\frac{Z'}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}\,. \tag{1.5.14}$$

Получить аналог уравнения (1.5.10) мы уже не сможем, *нельзя утверждать, что работа реакции связи на любом возможном перемещении равна нулю*. В данном случае мы имеем другой класс перемещений $\delta x, \delta y, \delta z$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z = 0\,. \qquad (1.5.15)$$

Перемещения $\delta x, \delta y, \delta z$ мы называем виртуальными перемещениями. Скорости, соответствующие виртуальным перемещениям будем называть виртуальными скоростями. Они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta\dot{z} = 0\,. \qquad (1.5.16)$$

Физический смысл виртуальных перемещений заключается в следующем: *это перемещения, которые были бы возможны на поверхности, если в некоторый момент времени* t_0 *эту поверхность* ***мгновенно остановить***.

В рассмотренных выше задачах 7 и 8 левая часть уравнений Пфаффа (1.5.6) и (1.5.13) является полным дифференциалом, что не является существенным для общего понятия о связях. Уравнения связи могут содержать любую форму, не обязательно такую, которая допускает интегрирующий множитель. В общем случае для возможных перемещений уравнение связи можно записать так:

$$adx + bdy + cdz + pdt = 0\,, \qquad (1.5.17)$$

где a, b, c, p - заданные функции переменных x, y, z, t, принадлежащие классу C_1. Для виртуальных перемещений

$$a\delta x + b\delta y + c\delta z = 0\,. \qquad (1.5.18)$$

Возможные скорости удовлетворяют уравнению

$$a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + p = 0\,, \qquad (1.5.19)$$

а виртуальные скорости – уравнению

$$a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} = 0\,. \qquad (1.5.20)$$

Задача 9.

Материальная точка находится под действием заданной силы (X, Y, Z) и реакции связи (X', Y', Z'). Реакция связи такова, что работа её на любом виртуальном перемещении равна нулю, и движение при действии указанных выше двух сил является возможным, то есть действительное движение удовлетворяет уравнению (1.5.19). Составить уравнения движения.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$
Дано	(X, Y, Z), (X', Y', Z')

Решение задачи.

Будем решать задачу в лабораторной ИСО. Из условия задачи известно, что работа, совершаемая реакцией связи на любом виртуальном перемещении, равна нулю и так как

$X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z = 0$ для всех $\delta x, \delta y, \delta z$, удовлетворяющих уравнению (1.5.18), можем сразу написать

$$\frac{X'}{a} + \frac{Y'}{b} + \frac{Z'}{c} = \lambda, \tag{1.5.21}$$

откуда

$$X' = \lambda a, \; Y' = \lambda b, \; Z' = \lambda c. \tag{1.5.22}$$

Окончательно для переменных x, y, z можно составить следующие уравнения:

$$m\ddot{x} = X + \lambda a, \tag{1.5.23}$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda b, \tag{1.5.24}$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda c, \tag{1.5.25}$$

$$a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + p = 0. \tag{1.5.19}$$

В общем случае этих четырёх уравнений достаточно для определения четырех неизвестных x, y, z, λ как функций независимой переменной t.

Очевидно, что для решения конкретной задачи необходимо знать значения x, y, z и $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (для (1.5.19)) в момент времени $t = 0$.

Геометрический смысл уравнения (1.5.18) заключается в том, что виртуальное перемещение лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору (a, b, c), а из уравнения (1.5.21) следует, что реакция связи направлена вдоль этого вектора. Множитель λ пропорционален величине реакции связи, которая равна $\lambda\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

В общем случае возможные и виртуальные перемещения различаются, однако если $p \equiv 0$, они совпадают. Система, в которой $p \equiv 0$ называется *катастатической*. Для катастатической системы возможные и виртуальные перемещения идентичны, а скорость $\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = 0$ является возможной скоростью.

§1.6. Обобщённые (Лагранжевы[1]) координаты

Ранее мы установили, что положение системы материальных точек, подчинённой k голономным связям, определяется $s = 3n - k$ независимыми декартовыми координатами.

В дальнейшем мы не будем связывать себя ограничениями в выборе системы координат. Для определения положения системы материальных точек мы будем использовать независимые друг от друга параметры $q_1, q_2, \ldots, q_s$, которые могут иметь различную размерность (углы, площади, длину дуг и так далее).

Эти независимые между собой параметры $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (s - число степеней свободы) называются *обобщёнными (Лагранжевыми) координатами*.

Введение таких координат, как правило, сопряжено с определёнными трудностями, которые носят скорее математический, чем физический характер. Важно отличать трудности, присущие самому изучаемому явлению, от трудностей, связанных с выбором системы координат.

[1] Лагранжевы координаты введены Лагранжем в 1788 году.

Выбор обобщённых координат производится следующим образом. Выбирается s параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$, значения которых определяют конфигурацию системы материальных точек в момент времени t.

Выбор координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ должен быть произведён таким образом, чтобы их значения представляли *все возможные конфигурации системы материальных точек*, а не некоторую совокупность возможных конфигураций.

Декартовы координаты $x_1, x_2, \ldots, x_s$ точек системы материальных точек будут некоторыми функциями от q и t.

Все $3n$ декартовых координат можно выразить через обобщённые координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \end{aligned}\right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6.1}$$

Если на систему материальных точек наложено k связей, то эти функции (1.6.1) обращают в тождество уравнения связей

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) \equiv 0, \; (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.6.2}$$

для *любого момента времени*.

Уравнения (1.6.1) можно записать в векторной форме

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} = \vec{r}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t). \tag{1.6.3}$$

Если связи стационарные, то функции (1.6.1) можно выбрать так, чтобы они не содержали явно времени t, тогда

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \end{aligned}\right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6.4}$$

Или в векторной форме

$$\vec{r}_i = \vec{r}\left(q_1, q_2, \ldots, q_s\right), \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (1.6.5)$$

Рассмотрим несколько задач на выбор обобщённых координат.

Задача 10.

Простой маятник. Материальная точка движется без трения по окружности расположенной в вертикальной плоскости. Такое движение может осуществлять бусинка, движущаяся без трения по гладкой проволоке, изогнутой в форме окружности радиуса r . Так же будет двигаться материальная точка М2 из задачи 1(а), если точку М1 шарнирно закрепить в некоторой точке О, предоставив стержню возможность свободно качаться в вертикальной плоскости около этой точки. Найти обобщённые координаты.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	q_i
Дано	r

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, поместив начало системы координат в точку М1 – центр окружности, по которой движется изучаемая нами материальная точка, разместив начало системы координат в центре окружности. Сделаем чертёж.

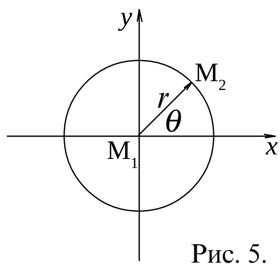

Рис. 5.

Очевидно, что положение частицы на окружности будет вполне определяться одной обобщённой координатой - углом θ , отсчитываемым от наинизшей точки окружности. $q = \theta$ и уравнения (1.6.4) примут вид:

$$x = r\cos\theta = r\cos q\ , \ y = r\sin\theta = r\sin q\ . \qquad (1.6.6)$$

В данной задаче обобщённая координата q имеет размерность угла.

Задача 11.

Сферический маятник. Материальная точка М скользит под действием силы тяжести по гладкой (без трения) поверхности сферы радиуса r . Найти обобщённые координаты.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	q_i
Дано	$\vec{r}$

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, совместив начало системы координат с центром сферы. Сделаем чертёж.

Из чертежа видно, что положение материальной точки М может быть определено с помощью полярных углов θ и φ . Положим $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, где θ - угол между вектором $\vec{r}$ и направленной вниз осью Oz, а φ - азимутальный угол между плоскостью MOz и координатной плоскостью xOz.

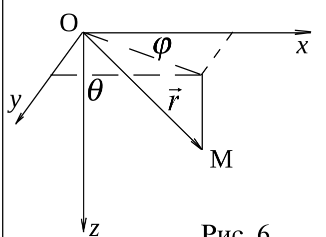

Рис. 6.

Уравнения (1.6.4) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi = r\sin q_1\cos q_2 \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi = r\sin q_1\sin q_2 \\ z &= r\cos\theta = r\cos q_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.6.7)$$

Задача 12.

Круговая орбита. Материальная частица совершает плоское движение под действием силы, всё время направленной в начало координат. Найти обобщённые координаты.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	q_i
Дано	$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Решение задачи.

В данной задаче материальная частица будет двигаться по окружности некоторого радиуса r, расположенной в какой-либо плоскости. Выберем для определённости вертикальную плоскость. Свяжем ИСО с лабораторией, совместив начало системы координат с центром окружности и воспользуемся рис. 6.

Положение материальной точки будет определяться радиусом окружности r и полярным углом θ.

$q_1 = r$, $q_2 = \theta$.

Уравнения (1.6.4) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta = q_1\cos q_2 \\ y = r\sin\theta = q_1\sin q_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.6.8)$$

Здесь обобщённые координаты q_1 и q_2 имеют различную размерность.

Задача 13.

Твёрдая пластинка движется в своей плоскости. Составить уравнения для обобщённых координат твёрдой плоской пластинки, движущейся в своей плоскости.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	q_i
Дано	$G(\xi,\eta)$- координаты центра тяжести пластинки,
	$M(a,b)$- координаты некоторой точки М пластинки.

Решение задачи.

Выберем лабораторную ИСО, связав с ней систему координат

xOy. Пусть координаты центра тяжести G плоской пластинки в этой системе координат имеют значения ξ и η. Другую систему координат $x'O'y'$ свяжем с плоской пластинкой, совместив начало координат с центром тяжести G. Пусть координаты некоторой точки M в системе координат xOy имеют значения x и y, а в системе координат $x'O'y'$ имеют значения a и b. Угол, образуемый осями Ox и $O'x'$, обозначим через θ. Сделаем чертёж.

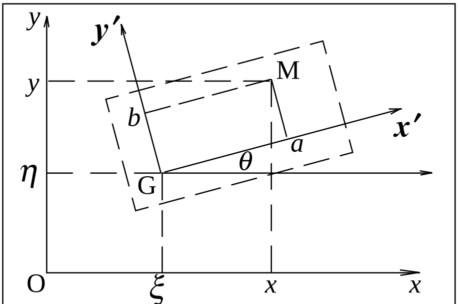

Рис.7.

В качестве обобщённых координат естественно выбрать координаты центра тяжести G и угол θ между осями координат Ox и $O'x'$.

$q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, $q_3 = \theta$.

Для уравнения (1.6.4) можно написать

$$x = \xi + a\cos\theta - b\sin\theta,$$

$$y = \eta + a\sin\theta + b\cos\theta$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= q_1 + a\cos q_3 - b\sin q_3 \\ y &= q_2 + a\sin q_3 + b\sin q_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.6.9)$$

В задачах 10-13 мы имели голономные системы с числом n обобщённых координат, равных числу k степеней свободы механической системы. Рассмотрим задачу с неголономной системой.

Задача 14.

Составить уравнения для обобщённых координат материальной системы состоящей из материальных точек M1 и M2, соединённых жестким стержнем длиной l . Пусть стержень совершает плоское движение и пусть наложенная связь заставляет точку М1 двигаться в направлении точки М2.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	q_i
Дано	М1 (x_1, y_1),
	М2 (x_2, y_2),
	l (жесткий стержень)

Решение задачи.

Выберем неподвижную ИСО - лабораторию. Сделаем чертёж. Пусть стержень образует с осью Ox угол θ .

Стержень М1М2 совершает плоское движение. Наложенная идеальная связь такова, что точка М1 может двигаться только вдоль направления М1М2. В качестве обобщённых координат естественно выбрать координаты точки М1 x_1 и y_1 по отношению к неподвижным осям xOy и угол наклона θ стержня к оси Ox .

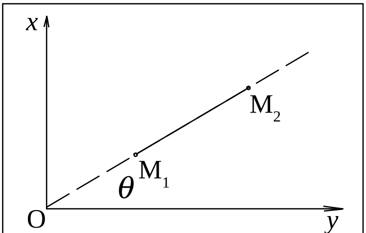

Рис.8.

$$q_1 = x_1, \; q_2 = y_1, \; q_3 = \theta .$$

Для угла наклона θ стержня можно написать

$$tg\theta = \frac{dy_1}{dx_1} \text{ или } \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{dy_1}{dx_1},$$

откуда для возможных перемещений получим

$$\cos\theta dx_1 - \sin\theta dy_1 = 0 . \tag{1.6.10}$$

Это уравнение не допускает введения интегрирующего множителя.

Система имеет две степени свободы и одну связь ($k = 2$, $l = 1$), но число обобщённых координат равно трём ($n = k + l = 3$).

Уравнение (1.6.4) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= q_1 + l\cos q_3 \\ y &= q_2 + l\sin q_3 \end{aligned}\right\}. \tag{1.6.11}$$

Несмотря на то, что система имеет лишь две степени свободы, множество достижимых конфигураций является трёхпараметрическим и систему можно перевести из любого начального положения в любое конечное.

Например, положение системы материальных точек М1 и М2 можно характеризовать с помощью третьей координаты z, которую можно подобрать, используя координаты x, y, $z = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Определим правила вычисления вариаций обобщённых координат. Выпишем дифференциалы от функций (1.6.1) при *фиксированном времени* t.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{d}x_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m \\ \tilde{d}y_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m \\ \tilde{d}z_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m \end{aligned}\right\}. \tag{1.6.12}$$

Для дифференциалов при фиксированном t от тождеств, которые получаются из уравнений связей после подстановки в них функций (1.6.1) $f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\tilde{d}x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\tilde{d}y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\tilde{d}z_i\right) = 0, \tag{1.6.13}$$

$(j = 1,2,\ldots,k)$.

Уравнения (1.6.13) совпадают с уравнением (1.4.16) и следовательно дифференциалы $\tilde{d}x_i, \tilde{d}y_i, \tilde{d}z_i$ совпадают с вариациями $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

Как для стационарной, так и для нестационарной связи вариации координат будут вычисляться по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \delta q_m \\ \delta y_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \delta q_m \\ \delta z_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \delta q_m \end{aligned}\right\}, \tag{1.6.14}$$

$$\delta q_m = \tilde{d} q_m, \ (m = 1,2,\ldots,s), \tag{1.6.15}$$

называемым *вариациями обобщённых координат*.

Из (1.6.3) и (1.6.14) следует, что

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m . \tag{1.6.16}$$

§1.7. Обобщённые силы

Рассмотрим выражение для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i , \tag{1.7.1}$$

подставляя в (1.7.1) значения для $\delta \vec{r}_i$ из (1.6.16) получим

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m .$$

Внесём $\vec{F}_i$ под знак второй суммы и поменяем знак суммирования, тогда

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} \delta q_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m}.$$

Суммы

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right), \quad (1.7.2)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s)$$

назовём *обобщёнными силами.*

Каждой обобщённой координате q_m *соответствует своя обобщённая сила* Q_m*, имеющая размерность работы, делённую на размерность обобщённой координаты* $[Q_m] = \dfrac{[A]}{[q_m]}$:

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m \delta q_m = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_s \delta q_s. \quad (1.7.3)$$

Таким образом *обобщённые силы есть коэффициенты при вариациях обобщённых координат в выражении для виртуальной работы.*

Задача 15.

Найти обобщённые силы для сферического маятника. Материальная точка А массой m скользит под действием силы тяжести по гладкой (без трения) поверхности сферы.

Найти	Q_i
Дано	m, r

Запишем условие задачи кратко.

Решение задачи.

Выберем ИСО «Лаборатория» и поместим начало системы координат в центре сферы. Сделаем чертёж.

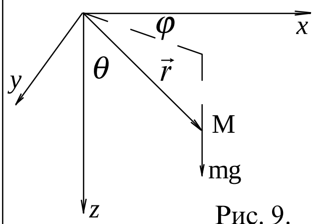

Рис. 9.

Из задачи 8 нам известно, что

$q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$.

$x = r\sin\theta\cos\varphi$,

$y = r\sin\theta\sin\varphi$,

$z = r\cos\theta$.

Для определения обобщённых сил используем формулу (1.7.2).

$$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

$$Q_2 = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Учтём, что $F_x = F_y = 0$, $F_z = mg$. Тогда

$$Q_1 = F_z \frac{\partial z}{\partial \theta},\ \ Q_2 = F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi},\ \text{где}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\ \text{а}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Окончательно получим

$Q_1 = -mgr\sin\theta = -mgr\sin q_1$,

$Q_2 = mg \cdot 0 = 0$.