13. Билинейные и квадратичные функции

13.1. Билинейная функция

Определение 13.1. ***Билинейной функцией (билинейной формой)*** *на линейном пространстве* L *называется функция* b *от двух векторов из* L*, линейная по каждому из своих аргументов, т.е. для любых элементов* $x, y, z \in L$ *и любого числа* $\alpha \in \mathbf{K}$ *выполнены равенства*

$$b(x+y,z)=b(x,z)+b(y,z),$$
$$b(\alpha x,y)=\alpha b(x,y),$$
$$b(x,y+z)=b(x,y)+b(x,z),$$
$$b(x,\alpha y)=\alpha b(x,y). \qquad (13.1)$$

Примеры.

1. Скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y})$ векторов $\vec{x},\vec{y}\in L_3$ в силу свойств скалярного произведения (п. 4.6.1 стр. 93) есть билинейная функция.

2. Пусть $\vec{a}\in L_3$ - фиксированный вектор, а $\vec{x},\vec{y}\in L_3$ - переменные векторы. Смешанное произведение $(\vec{a},\vec{x},\vec{y})$ в силу свойств смешанного произведения векторов (п.п. 4.6.5 и 4.7.3) есть билинейная функция.

3. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ - линейные функции. Их произведение

$$f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$$

есть билинейная функция, так как по первой переменной x

$$f(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1+x_2)\cdot\psi(y)=\varphi(x_1)\cdot\psi(y)+\varphi(x_2)\cdot\psi(y)=$$
$$=f(x_1,y)+f(x_2,y),$$
$$f(\lambda x,y)=\varphi(\lambda x)\cdot\psi(y)=\lambda\varphi(x)\cdot\psi(y)=\lambda f(x,y).$$

Выберем в L_n базис $\mathbf{e}$ и вычислим в этом базисе значение билинейной функции $b(x,y)$ с учётом (13.1).

Так как (с учётом правила суммирования Эйнштейна)

$$x=\xi^i\mathbf{e}_i,\ y=\eta^j\mathbf{e}_j,$$

то

$$b(x,y)=b\left(\xi^i\mathbf{e}_i,\eta^j\mathbf{e}_j\right)=\xi^i\eta^j b\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right). \tag{13.2}$$

Введём обозначения:

$$\beta_{ij}=b\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right). \tag{13.3}$$

тогда получим

$$b(x,y)=\beta_{ij}\xi^i\eta^j. \tag{13.4}$$

Формула (13.4) выражает билинейную функцию $b(x,y)$ в координатах по данному базису $\mathbf{e}$.

Покажем, что множество всех билинейных функций, заданных в линейном пространстве L, тоже образует линейное пространство.

Выберем в L_n базис $\mathbf{e}$ и рассмотрим одночленные билинейные функции вида

$$I^{ij}(x,y)=\xi^i\eta^j. \tag{13.5}$$

Подставляя (13.5) в (13.4) получим

$$b(x,y)=\beta_{ij}\xi^i\eta^j=\beta_{ij}I^{ij}(x,y). \tag{13.6}$$

Если взять $x=\mathbf{e}_l$, а $y=\mathbf{e}_m$ при любых фиксированных l и m, тогда

$$I^{lm}\left(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_m\right)=\xi^l\eta^m=1,$$

а все остальные билинейные функции (13.5) будут равны нулю. Отсюда следует, что билинейные функции I^{ij} из (13.5) линейно независимы, а формула (13.6) даёт разложение билинейной функции $b(x,y)$ по базису (13.5). Этот базис состоит из n^2 элементов.

Следовательно размерность пространства из билинейных функций имеет размерность n^2.

Определение 13.2. *Билинейная функция* $b(x,y)$ *называется* ***симметричной****, если для любых элементов* $x, y \in L$

$$b(x,y) = b(y,x).$$

Билинейная функция $b(x,y)$ *называется* ***кососимметричной****, если для любых элементов* $x, y \in L$

$$b(x,y) = -b(y,x).$$

В случае симметричной билинейной функции коэффициенты, определяемые по (13.3) симметричны:

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

В случае кососимметрической билинейной функции для коэффициентов выполняется условие:

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} \text{ и } \beta_{ii} = 0.$$

Рассмотрим произвольную билинейную функцию $b(x,y)$ и построим с её помощью новые билинейные функции

$$\varphi_s(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) + b(y,x)], \tag{13.7}$$

$$\varphi_a(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) - b(y,x)]. \tag{13.8}$$

Покажем, что φ_s - симметричная, а φ_a - кососимметричная билинейные функции. В самом деле,

$$\varphi_s(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) + b(y,x)] = \frac{1}{2}[b(y,x) + b(x,y)] = \varphi_s(y,x),$$

$$\varphi_a(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) - b(y,x)] = -\frac{1}{2}[b(y,x) - b(x,y)] = -\varphi_a(y,x).$$

Операции, при помощи которых из билинейной функции $b(x,y)$ получаются билинейные функции $\varphi_s(x,y)$ и $\varphi_a(x,y)$, называются соответственно ***симметрированием*** и ***альтернированием*** билинейной функции $b(x,y)$.

Складывая (13.7) и (13.8) получим

$$b(x,y)=\varphi_s(x,y)+\varphi_a(x,y) \tag{13.9}$$

формулу разложения билинейной функции $b(x,y)$ ***на симметричную*** $\varphi_s(x,y)$ ***и кососимметричную*** $\varphi_a(x,y)$ ***составляющие***.

Покажем, что как симметричные, так и кососимметричные функции образуют линейные подпространства в пространстве всех билинейных функций с аргументами из L. Чтобы найти размерности этих подпространств построим в них базисы.

Симметричную билинейную функцию $\varphi_s(x,y)$ можно представить в виде

$$\varphi_s(x,y)=\sum_{i<k}\varphi_{ik}\cdot\left(\xi^i\eta^k+\xi^k\eta^i\right)+\sum_i\varphi_{ii}\cdot\xi^i\eta^i\,. \tag{13.10}$$

Рассмотрим функции

$$\left.\begin{aligned}&\bar{I}^{ik}(x,y)=\xi^i\eta^k+\xi^k\eta^i \quad \text{при } i\neq k,\\&\bar{I}^{ii}(x,y)=\xi^i\eta^i.\end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

Билинейные функции (13.11) линейно независимы и симметричны, а любая симметричная билинейная функция $\varphi_s(x,y)$ выражается через них по формуле вида (13.10). таким образом функции (13.11) составляют базис в подпространстве всех симметричных билинейных функций. Их количество в базисе (13.11) равно

$$C_n^2+n=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}+n=\frac{1}{2}n(n+1)\,.$$

Таким образом, размерность подпространства симметричных билинейных функций равна $\frac{1}{2}n(n+1)$. Это говорит о том, что при любом выборе линейно независимых симметричных билинейных функций $w_1(x,y), w_2(x,y), \ldots, w_N(x,y)$ в числе $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ произвольная симметричная билинейная функция $\varphi_s(x,y)$ может быть представлена в виде

$$\varphi_s(x,y) = \lambda^i w_i(x,y), \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{13.12}$$

где λ^i числовые коэффициенты.

Кососимметричную билинейную функцию $\varphi_a(x,y)$ можно представить в виде

$$\varphi_a(x,y) = \sum_{i,k} \varphi_{ik}\left(\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i\right), \tag{13.13}$$

и в качестве базиса можно взять функции

$$\tilde{I}^{ik}(x,y) = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i. \tag{13.14}$$

Общее число этих функций есть $\tilde{N} = \frac{1}{2}n(n-1)$ и при любом выборе линейно независимых кососимметричных билинейных функций $\tilde{w}_1(x,y), \tilde{w}_2(x,y), \ldots, \tilde{w}_{\tilde{N}}(x,y)$ произвольную кососимметричную билинейную функцию $\varphi_a(x,y)$ можно представить в виде

$$\varphi_a(x,y) = \mu^j \tilde{w}_j(x,y), \quad j = 1,2,\ldots,\tilde{N}, \tag{13.15}$$

где μ^j - числовые коэффициенты.

Теорема 13.1. *Пространство билинейных функций является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных билинейных функций.*

Ясно, что *билинейная функция является одновременно симметричной и кососимметричной тогда и только тогда, когда она нулевая*. Это говорит о том, что пересечение подпространств симметричных и кососимметричных билинейных функций есть подпространство, состоящее из нулевой билинейной функции. На основании предложения 9.17 мы можем считать настоящую теорему доказанной.

С другой стороны, всякая билинейная функция $b(x,y)$ может быть на основании (13.9) представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейной функции, именно

$$b(x,y) = \varphi_s(x,y) + \varphi_a(x,y),$$

где симметричная билинейная функция $\varphi_s(x,y)$ принадлежит подпространству симметричных билинейных функций, а кососимметричная билинейная функция $\varphi_a(x,y)$ принадлежит подпространству кососимметричных билинейных функций и их прямая сумма совпадает со всем пространством билинейных функций.

Пусть W - пространство билинейных функций $b(x,y)$ определённых в линейном пространстве L_n и $\dim W = n^2$; W_s - подпространство симметричных билинейных функций $\varphi_s(x,y)$ и $\dim W_s = \frac{1}{2}n(n+1)$; W_a - подпространство кососимметричных билинейных функций $\varphi_a(x,y)$ и $\dim W_a = \frac{1}{2}n(n-1)$. Тогда

$$\dim W_s + \dim W_a = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2 = \dim W,$$

что соответствует определению 9.12 прямой суммы подпространств.

13.2. Матрица билинейной функции (формы)

Вновь рассмотрим формулу (13.4)

$$b(x,y) = \beta_{ij}\xi^i\eta^j. \tag{13.4}$$

Здесь n^2 чисел $\beta_{ij} = b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ называются коэффициентами билинейной функции в базисе $\mathbf{e}$ и составляют *матрицу*

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn}\end{pmatrix} \qquad (13.16)$$

билинейной функции в базисе $\mathbf{e}$.

Равенство (13.4) можно кратко записать в матричном виде:

$$b(x,y)=\xi^T\mathbf{B}\eta\,. \qquad (13.17)$$

Ранее мы выяснили, что если билинейная функция симметрична, то её коэффициенты связаны соотношением $\beta_{ij}=\beta_{ji}$, или

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}^T\,.$$

Матрицу, которая совпадает со своей транспонированной, будем называть *симметричной* матрицей. Обратно, пусть билинейная функция $b(x,y)$ имеет симметричную матрицу. Тогда, поскольку матрица размера 1×1 не меняется при транспонировании,

$$b(x,y)=\xi^T\mathbf{B}\eta=\left(\xi^T\mathbf{B}\eta\right)^T=\eta^T\mathbf{B}^T\xi=b(x,y)\,.$$

Мы доказали

Предложение 13.1. *Билинейная функция симметрична тогда и только тогда, когда её матрица симметрична.*

Посмотрим теперь как меняется матрица $\mathbf{B}$ билинейной функции $b(x,y)$ при переходе от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$.

Пусть $\mathbf{e}'=\mathbf{eS}$, тогда в соответствии с (9.26)

$$\xi=\mathbf{S}\xi' \text{ и } \eta=\mathbf{S}\eta'$$

и

$$b(x,y)=\xi^T\mathbf{B}\eta=(\mathbf{S}\xi')^T\mathbf{B}(\mathbf{S}\eta')=\xi'^T\left(\mathbf{S}^T\mathbf{BS}\right)\eta'\,.$$

Так как матрица $\mathbf{B}'$ билинейной функции $b(x,y)$ в базисе $\mathbf{e}'$ однозначно определена, то

$$\mathbf{B}'=\mathbf{S}^T\mathbf{BS}\,. \qquad (13.18)$$

Обозначив элементы матрицы $\mathbf{S}$ через s_i^k получим выражения для элементов $\mathbf{B}'$

$$\beta'_{ij} = s_i^k s_j^m \beta_{km}, \quad i, j, k, m = 1,2,\ldots,n. \qquad (13.19)$$

Рассмотрим, как выглядят приведённые ранее примеры **1 - 3** в матричной записи.

1. Скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y})$ векторов $\vec{x}, \vec{y} \in L_3$ в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, в соответствии с (4.35) есть $(\vec{x}, \vec{y}) = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3$ и с учётом (13.4) матрица коэффициентов билинейной формы выглядит так:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Смешанное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{a}$ - фиксированный вектор из L_3 в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в соответствии с (4.57) имеет вид

$$(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix} =$$

$$= a^3\xi^1\eta^2 - a^2\xi^1\eta^3 - a^3\xi^2\eta^1 + a^1\xi^2\eta^3 + a^2\xi^3\eta^1 - a^1\xi^3\eta^2.$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (13.4) получим

$$\beta_{11} = 0,\ \beta_{12} = a^3,\ \beta_{13} = -a^2,\ \beta_{21} = -a^3,\ \beta_{22} = 0,\ \beta_{23} = a^1,$$

$$\beta_{31} = a^2,\ \beta_{32} = -a^1,\ \beta_{33} = 0.$$

Матрица коэффициентов данной билинейной функции имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как для данной матрицы выполнено условие $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, мы имеем пример кососимметричной билинейной функции.

3. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ линейные функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ можно (см. (12.3)) записать в виде

$$\varphi(x) = a_i \xi^i \text{ и } \psi(y) = b_j \eta^j .$$

Тогда билинейная функция $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ примет вид

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) = a_i b_j \xi^i \eta^j ,$$

а её матрица будет выглядеть так:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В некотором базисе задана билинейная функция

$$b(x, y) = \xi^1 \eta^1 + \xi^1 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^1 + 4\xi^2 \eta^2 + 3\xi^1 \eta^3 + \xi^3 \eta^3 .$$

Записать матрицу этой билинейной функции для L_3 и L_4.

Для L_3

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

для L_4

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Как изменится матрица $\mathbf{B}$ в L_3 из примера 4 если перейти к базису

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3 ?$$

Составим матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её транспонированная матрица

$$\mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{B}' = \mathbf{S}^T\mathbf{B}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$b(x,y) = 4\xi^1\eta^1 + 8\xi^1\eta^2 + 3\xi^1\eta^3 + 2\xi^2\eta^1 + 7\xi^2\eta^2 + \\ + 3\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 + 3\xi^3\eta^3$$

13.3. Квадратичные линейные функции (формы)

Определение 13.3. *Квадратичной функцией (формой) на линейном пространстве* L *называется функция* k*, значение которой на любом векторе* $x \in L$ *определяется равенством*

$$k(x) = b(x,x),$$

где b - симметричная билинейная функция.

В качестве примера можно рассмотреть скалярное произведение вектора из L_3 сопоставляющее вектору квадрат его длины

$$k(x)=b(x,x)=\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2+\left(\xi^3\right)^2.$$

По заданной квадратичной форме k однозначно определяется соответствующая симметричная билинейная функция b.

Пусть x,y - произвольные векторы. Тогда

$$k(x+y)=b(x+y,x+y)=b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)+b(y,y).$$

Учитывая, что $b(x,y)=b(y,x)$, получим

$$b(x,y)=\frac{1}{2}\big(k(x+y)-k(x)-k(y)\big). \qquad (13.20)$$

Матрицей квадратичной формы в базисе **e** *называется матрица соответствующей билинейной функции* и согласно (13.17) мы имеем следующее выражение значения квадратичной формы через координатный столбец вектора:

$$k(x)=\xi^T\mathbf{B}\xi, \qquad (13.21)$$

или, в развёрнутом виде,

$$k(x)=\beta_{ij}\xi^i\xi^j, \quad i,j=1,2,...,n. \qquad (13.22)$$

Правая часть последней формулы - однородный многочлен второй степени относительно $\xi^1,\xi^2,...,\xi^n$. Слово “форма” и будем понимать как “однородный многочлен”. В формуле (13.22) содержатся подобные члены: при $i\neq j$ члены $\beta_{ij}\xi^i\xi^j$ и $\beta_{ji}\xi^j\xi^i$ совпадают. Поэтому после приведения подобных членов (13.220 примет вид

$$k(x)=\beta_{11}\left(\xi^1\right)^2+2\beta_{12}\xi^1\xi^2+\beta_{22}\left(\xi^2\right)^2+2\beta_{13}\xi^1\xi^3+\ldots \qquad (13.23)$$

Определение 13.4. *Квадратичная форма* k *в базисе* **e** *имеет диагональный вид, если в этом базисе*

$$k(x)=\lambda_i\left(\xi^i\right)^2. \qquad (13.24)$$

Матрица квадратичной формы в этом случае имеет диагональный вид.

Теорема 13.2. *Для каждой квадратичной формы* k *существует базис, в котором она имеет диагональный вид.*

Так как квадратичная форма есть симметричная билинейная функция, она может быть представлена симметричной квадратной матрицей и мы можем установить взаимно однозначное соответствие между квадратичными формами и симметричными линейными преобразованиями. Таким образом вопрос о приведении матрицы квадратичной формы можно свести к вопросу (см. п. 11.8) о приведении к диагональному виду матрицы симметричного линейного преобразования, т.е. к отысканию собственных значений матрицы, задающей в некотором базисе квадратичную форму. Следует иметь в виду, что *симметричность матрицы предполагает вещественность собственных значений*.

Диагональный вид квадратичной формы в вещественном пространстве будем называть ***каноническим видом***, если все элементы ε_i на диагонали могут быть равны только -1, 0, 1. В комплексном пространстве диагональный вид квадратичной формы канонический, если числа на диагонали могут принимать значения только 0 и 1.

Теорема 13.3. *Для каждой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид*.

Если матрица уже приведена к диагональному виду, т.е. на диагонали стоят собственные значения матрицы, надо поделить каждую j-ю строку и каждый j-й столбец на $\sqrt{\lambda_j}$ в случае комплексного пространства и на $\sqrt{\|\lambda_j\|}$ в случае вещественного пространства. Это равносильно делению j-го базисного (собственного) вектора на то же число ($e_i = \frac{l_i}{\|l_i\|} \in L_n$, $e_i = \frac{l_i}{l_i} \in C_n$). Сделав это для всех j таких, что $\lambda_j \neq 0$, мы приведём квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 6. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$k(x) = 5(\xi^1)^2 + 8\xi^1\xi^2 + 5(\xi^2)^2 .$$

Составим матрицу квадратичной формы и её характеристическое уравнение

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(5-\lambda)^2 - 16 = 0 .$$

Отсюда имеем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. Диагональный вид квадратичной формы можно записать сразу:

$$k(\tilde{x}) = (\tilde{\xi}^1)^2 + 9(\tilde{\xi}^2)^2,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Если нас интересует базис, в котором квадратичная форма привелась к диагональному виду, нам необходимо найти собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

Составим систему уравнений, определяющую искомые собственные векторы:

$$\begin{aligned} &(5-\lambda)l + 4m = 0, \\ &4l + (5-\lambda)m = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\lambda = \lambda_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} &4l + 4m = 0, \\ &4l + 4m = 0. \end{aligned}$$

Система уравнений свелась к уравнению

$$l + m = 0,$$

ранг которого равен 1 и мы имеем фундаментальное решение

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

После нормировки, мы можем этот вектор принять в качестве первого базисного вектора

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = 9$ и подставляя это значение в (*), получим уравнение

$$l - m = 0,$$

ранг которого равен 1. Фундаментальное решение $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, а второй базисный вектор

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Получим для проверки диагональный вид данной квадратичной формы используя формулу (13.18).

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для приведения данной матрицы к каноническому виду надо в соответствием с теоремой 13.3 поделить каждую j-ю строку и каждый j-й столбец на $\sqrt{\|\lambda_j\|}$. В нашем случае нам надо поделить вторую строку и второй столбец $\sqrt{\|9\|} = 3$. Используя п. 1.7 и предложение 1.7 мы добьемся результата, если умножим матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$ справа и слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть канонический вид матрицы квадратичной формы, сама же форма теперь может быть записана так

$$k(x') = (\xi'^1)^2 + (\xi'^2)^2 .$$

Рассматривая матрицу

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

как матрицу перехода от базиса $\tilde{\mathbf{e}}$ к каноническому базису $\mathbf{e}'$, мы можем явно получить канонические базисные векторы по формуле $\mathbf{e}' = \tilde{\mathbf{e}}\mathbf{S}$.

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что канонические базисные векторы уже не являются ортонормированными.

13.4. Ранг и индекс квадратичной формы

Существует много базисов, в которых данная квадратичная форма имеет канонический вид, однако оказывается, что коэффициенты ε_i одни и те же с точностью до порядка их расположения, как бы мы ни приводили квадратичную форму к каноническому виду. Это, в частности, следует из инвариантности характеристического многочлена (см. п. 11.5, теорема 11.2) относительно преобразования координат.

Терема 13.4. *Ранг матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса.*

Пусть на линейном пространстве L задана квадратичная форма $k(x)$ и пусть матрица $\mathbf{S}$ - матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$ по формуле (9.14)

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}\mathbf{S}\,.$$

Тогда матрица данной квадратичной формы $\mathbf{B}$ в соответствии с формулой (13.18) перейдёт в новую матрицу

$$\mathbf{B}' = \mathbf{S}^T\mathbf{B}\mathbf{S}\,.$$

Так как $\det\mathbf{S} \neq 0$, то на основании теоремы 1.6 получим

$$Rg\mathbf{B}' = Rg\mathbf{S}^T\mathbf{B}\mathbf{S} = Rg\mathbf{B}\mathbf{S} = Rg\mathbf{B}\,.$$

Если квадратичная форма приведена к диагональному виду, то ранг её матрицы равен числу диагональных элементов, отличных от нуля и это число не зависит от выбора базиса.

Определение 13.4. *Число не равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы $k(x)$ называется* ***рангом*** *квадратичной формы.*

Таким образом, *ранг квадратичной формы равен* рангу представляющей *его матрицы.*

В комплексном пространстве все квадратичные формы одного и того же ранга r приводятся к одному и тому же каноническому виду

$$\left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^2\right)^2 + \ldots + \left(\xi^r\right)^2\,.$$

Определение 13.5. *Квадратичную форму $k(x)$ будем называть* ***положительно определённой*** *на подпространстве L' пространства L, если $k(x) > 0$ для любого вектора $x \in L'$. Квадратичная форма $k(x)$* ***отрицательно определена*** *на L', если $k(x) < 0$ для любого век-*

тора $x \neq \theta \in L'$.

Квадратичные формы, для которых $k(x) \geq 0$ или $k(x) \leq 0$ при любом x, называются соответственно *полуопределёнными* (*знакопеременными.*)

Будем считать, что на нулевом пространстве квадратичная форма и положительно и отрицательно определена. В силу этого соглашения всегда будет существовать подпространство (хотя бы нулевое), на котором квадратичная форма отрицательно определена.

Определение 13.6. *Пусть* $L^{(-)}$ - *подпространство максимальной размерности среди всех подпространств, на которых квадратичная форма* $k(x)$ *отрицательно определена. Число* $\dim L^{(-)}$ *называется* ***отрицательным индексом*** s^{-} *или просто* ***индексом*** s *квадратичной формы.*

Аналогично определяется ***положительный индекс*** s^{+} квадратичной формы как максимальная из размерностей подпространств, на которых квадратичная форма $k(x)$ положительно определена.

Теорема 13.5. (**Закон инерции квадратичной формы**). *Число отрицательных и число положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора базиса, в котором она приведена к каноническому виду.*

Покажем сначала, что если в некотором базисе $\mathbf{e}$ пространства L квадратичная форма $k(x)$ приведена к каноническому виду, то число коэффициентов, равных -1, равно отрицательному индексу формы $k(x)$. Пусть в базисе $\mathbf{e}$ форма $k(x)$ ранга r с индексом s имеет канонический вид

$$-\left(\xi^1\right)^2-\left(\xi^2\right)^2-\ldots-\left(\xi^j\right)^2+\left(\xi^{j+1}\right)^2+\ldots+\left(\xi^r\right)^2.$$

Обозначим через L' линейную оболочку векторов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_j$, а через L'' - линейную оболочку остальных базисных векторов. Для любого вектора $x \in L'$ имеем

$$\xi^{j+1} = \ldots = \xi^{r} = 0,$$

и

$$k(x) = -\left(\xi^{1}\right)^{2} - \left(\xi^{2}\right)^{2} - \ldots - \left(\xi^{j}\right)^{2} < 0,$$

если только $x \neq \theta$. Значит $k(x)$ отрицательно определена на L' и $s \geq j$.

На L'' форма $k(x)$ положительно полуопределена, потому что

$$\xi^{1} = \ldots = \xi^{j} = 0$$

для любого $x \in L''$ и

$$k(x) = \left(\xi^{j+1}\right)^{2} + \left(\xi^{j+2}\right)^{2} + \ldots + \left(\xi^{r}\right)^{2}.$$

(форма может равняться нулю на ненулевом векторе, если $r < n$.)

$\dim L'' = n - j$. Пусть существует подпространство $L^{(-)}$ размерности $s > j$, на котором $k(x)$ отрицательно определена. Тогда, поскольку сумма размерностей подпространств L'' и $L^{(-)}$ больше n, эти подпространства имеют ненулевой вектор z в пересечении. Имеем

$k(z) < 0$, так как $z \in L^{(-)}$ и $k(z) \geq 0$, так как $z \in L''$.

Полученное противоречие показывает, что $j = s$ (число коэффициентов, равных -1) равно отрицательному индексу, и потому не зависит от выбора базиса. Число коэффициентов, равных +1, так же не зависит от выбора базиса, так как оно равно $r - s$, а ранг r и индекс s не зависят от выбора базиса.

Следствие. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в любом диагональном виде квадратичной формы не зависят от выбора базиса.*

Положительно определённые квадратичные формы имеют ранг n и индекс $s = 0$ ($s^{+} = n$) и приводятся к каноническому виду

$$k(x)=\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2+\ldots+\left(\xi^n\right)^2. \qquad (13.25)$$

Отрицательно определенные квадратичные формы имеют ранг n и индекс $s=n$ ($s^+=0$) и приводятся к каноническому виду

$$k(x)=-\left(\xi^1\right)^2-\left(\xi^2\right)^2-\ldots-\left(\xi^n\right)^2.$$

Положительно и отрицательно полуопределённые квадратичные формы ранга r приводятся соответственно к каноническим видам

$$k(x)=\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2+\ldots+\left(\xi^r\right)^2 \text{ и } k(x)=-\left(\xi^1\right)^2-\left(\xi^2\right)^2-\ldots-\left(\xi^r\right)^2.$$

В вещественном пространстве квадратичная форма характеризуется двумя числами в том смысле, что все квадратичные формы, у которых эти пары чисел одинаковы, приводятся к одному и тому же каноническому виду. В качестве таких чисел можно взять положительный s^+ и отрицательный $s^-=s$ индексы или же ранг, который равен их сумме, и отрицательный индекс. Часто вместе с рангом используют разность положительного и отрицательного индексов, которая называется ***сигнатурой*** *квадратичной формы* $\sigma=s^+-s^-$.

Условие положительной определённости квадратичной формы даёт так называемый *критерий Сильверста*.

Теорема 13.6. (**Критерий Сильверста**). *Для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы миноры её матрицы удовлетворяли неравенствам*

$$M_k=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \ldots & \beta_{1k}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_{k1} & \ldots & \beta_{kk}\end{vmatrix}>0, \quad (k=1,\ldots,n). \qquad (13.26)$$

Миноры вида (13.26) называются главными минорами матрицы, это миноры

$$M_1=\beta_{11}>0, \quad M_2=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}>0 \text{ и т.д.}$$

Ранее мы установили (теорема 13.2), что для всякой квадратичной формы найдётся базис, в котором она примет диагональный вид и её определитель будет

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Теперь

$$M_k = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k > 0, \quad (k = 1, \dots, n). \tag{13.27}$$

Из формулы (13.27) непосредственно вытекает, что для справедливости теоремы необходимо, чтобы все $\lambda_i > 0$.

На основании (13.27) мы можем записать, что

$$\lambda_1 = M_1 = \beta_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{M_2}{M_1}, \quad \lambda_3 = \frac{M_3}{M_2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{M_n}{M_{n-1}}. \tag{13.28}$$

Формулы (13.28) позволяют нам найти коэффициенты квадратичной формы в диагональном базисе, не вычисляя самого базиса.

Пример. Определить, является ли квадратичная форма

$$k(x) = \left(\xi^2\right)^2 - 4\xi^1\xi^2 + 2\xi^2\xi^3$$

знакопеременной.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы и вычислим все её главные миноры.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; M_1 = 0, \; M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \; M_3 = |\mathbf{B}| = 0.$$

В силу критерия Сильверста (теорема 13.6) данная квадратичная форма не является ни положительно определённой ни отрицательно определённой, т.е. она не является знакоопределённой.

Пример. Найти все значения параметра a при которых квадратичная форма

$$k(x)=(\xi^1)^2-2\xi^1\xi^2-2\xi^1\xi^3+4(\xi^2)^2+2\xi^2\xi^3+a(\xi^3)^2$$

является положительно определённой.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы и вычислим все её главные миноры.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix},\quad M_1=1>0,\ M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0,$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & a-1\end{vmatrix}=(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=M_2(a-1).$$

Главный минор $M_3=M_2(a-1)>0$, если $a>1$.

13.5. Полуторалинейные функции

В комплексных пространствах квадратичные формы используются сравнительно редко. В приложениях чаще встречаются так называемые *эрмитовы формы*.

Определение 13.7. *Функция* b *от двух векторов на комплексном линейном пространстве* C_n *называется* ***полуторалинейной*** *или* ***эрмитовой билинейной функцией,*** *если для любых векторов* $x, y, z\in C_n$ *и любого комплексного числа* $\alpha\in\mathbf{C}$

$$b(x+y,z)=b(x,z)+b(y,z),$$

$$b(\alpha x,y)=\alpha b(x,y),$$

$$b(x,y+z)=b(x,y)+b(x,z),$$

$$b(x,\alpha y)=\overline{\alpha}b(x,y). \qquad (13.29)$$

Отличие полуторалинейной функции от билинейной в том, что она не линейна по второму аргументу: при его умножении на число α значение функции умножается на комплексно сопряженное число $\overline{\alpha}$.

Перечислим (без доказательств) основные свойства этих функций.

Если в C_n выбран базис, то значение полуторалинейной функции на паре векторов $x,y\in C_n$ может быть выражено через координаты этих векторов формулой

$$b(x,y)=\beta_{ij}\xi^i\overline{\eta}^j=\xi^T\mathbf{B}\overline{\eta}. \qquad (13.30)$$

$\mathbf{B}$ называется *матрицей полуторалинейной функции*. Её элементы равны значениям b на парах базисных векторов:

$$\beta_{ij}=b(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

При замене базиса с матрицей перехода $\mathbf{S}$ матрица $\mathbf{B}$ заменяется на матрицу

$$\mathbf{B}'=\mathbf{S}^T\mathbf{B}\overline{\mathbf{S}}. \qquad (13.31)$$

Пример. Составить матрицу данной полуторалинейной функции

$$b(x,y)=\xi^1\overline{\eta}^1-3\xi^2\overline{\eta}^2+(2+i)\xi^3\overline{\eta}^3-i\xi^1\overline{\eta}^2+(4+i)\xi^3\overline{\eta}^1.$$

Решение. Для составления матрицы данной полуторалинейной функции воспользуемся формулой (13.30):

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 4+i & 0 & 2+i\end{pmatrix}.$$

Определение 13.8. *Полуторалинейная функция называется эрмитово симметричной, если для любой пары векторов*

$$b(x,y)=\overline{b(y,x)}.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе элементы матрицы этой функции удовлетворяли условию

$$\beta_{ij} = \overline{\beta}_{ji} .$$

Это равносильно условию

$$\mathbf{B}^T = \overline{\mathbf{B}} \tag{13.32}$$

на матрицу полуторалинейной функции.

Определение 13.9. *Матрица* $\mathbf{B}$*, для которой* $\mathbf{B}^T = \overline{\mathbf{B}}$*, называется эрмитовой матрицей.*

Элементы эрмитовой матрицы, симметричные относительно главной диагонали, комплексно сопряжены:

$$\beta_{ij} = \overline{\beta}_{ji} ,$$

в частности, *элементы на главной диагонали **вещественны***:

$$\beta_{ii} = \overline{\beta}_{ii} .$$

Определение 13.10. *Функция* k *на комплексном линейном пространстве* C_n *называется эрмитовой формой, если* $k(x) = b(x, y)$ *для некоторой эрмитовой симметричной полуторалинейной функции* b.

Для заданной эрмитовой формы k можно так выбрать базис в C_n, что её матрица будет иметь канонический вид: диагональная матрица с элементами -1, 0, 1 на диагонали. При этом для эрмитовых форм справедлив закон инерции: в матрице канонического вида число элементов на диагонали, равных -1, 0, 1, не зависит от базиса в C_n, в котором форма имеет канонический вид.

Таким образом, эрмитовы формы по свойствам ближе к квадратичным формам в вещественном пространстве, чем к квадратичным формам в комплексном пространстве.

Пример. Проверить, является ли данная полуторалинейная функция

$$b(x, y) = 2\xi^1\overline{\eta}^1 - 6\xi^2\overline{\eta}^2 + \left(1 + 3\sqrt{2}\right)\xi^3\overline{\eta}^3 + 3\xi^1\overline{\eta}^2 + 3\xi^2\overline{\eta}^1 + (2 - 5i)\xi^1\overline{\eta}^3 +$$

$$+ (2 + 5i)\xi^3\overline{\eta}^1 + 4i\xi^2\overline{\eta}^3 - 4i\xi^3\overline{\eta}^2$$

эрмитовой формой.

Решение.

Составим матрицу данной полуторалинейной функции:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2-5i \\ 3 & -6 & -4i \\ 2+5i & -4i & 1+3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что матрица данной полуторалинейной функции является эрмитово симметричной, так как $\mathbf{B}^T = \overline{\mathbf{B}}$, поэтому нам задана эрмитова квадратичная форма вида

$$h(x) = 2\left\|\xi^1\right\|^2 + 3\xi^1\overline{\eta}^2 + 3\xi^2\overline{\eta}^1 + (2-5i)\xi^1\overline{\eta}^3 + (2+5i)\xi^3\overline{\eta}^1 - 6\left\|\xi^2\right\|^2 +$$

$$+ 4i\xi^2\overline{\eta}^3 - 4i\xi^3\overline{\eta}^2 + \left(1+3\sqrt{2}\right)\left\|\xi^3\right\|^2.$$