I. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Основные понятия. Пусть задано нам пространство, в котором имеется излучение. Мы будем говорить в этом случае о поле излучения. Возьмем в этом поле некоторую точку $M(x, y, z)$ и некоторое направление, характеризуемое единичным вектором $\mathbf{n}$ (или угловыми координатами θ и φ). В этой точке M возьмем элементарную площадку величиной dS, перпендикулярную к направлению $\mathbf{n}$, так что $\mathbf{n}$ представляет собой нормаль к этой площадке.

Рассмотрим далее количество энергии с частотами, заключенными между ν и $\nu + d\nu$, которое за время dt проникает через площадку dS в направлениях, заключенных внутри некоторого малого телесного угла $d\omega$, образованного вокруг нормали n. Очевидно, что это количество энергии dE_ν будет пропорционально $d\nu\, dS\, dt\, d\omega$ и поэтому

$$dE_\nu = I_\nu\, d\nu\, dS\, dt\, d\omega, \tag{1.1}$$

где I_ν есть некоторый коэфициент пропорциональности, который будет зависеть вообще от координат точки M, направления n и частоты ν. Этот коэфициент I_ν будем называть специфической интенсивностью излучения в данной точке, в данном направлении и в данной частоте.

Если же мы сосчитаем общее количество энергии (независимо от частоты), протекающее через ту же площадку dS за время dt в направлениях, заключенных внутри телесного угла $d\omega$, то это количество будет уже равно

$$dE = I\, dS\, dt\, d\omega, \tag{1.2}$$

где очевидно

$$I = \int_0^\infty I_\nu\, d\nu. \tag{1.3}$$

Величина I называется полной интенсивностью излучения в данной точке и в данном направлении.

Допустим, что мы имеем дело с полем излучения, в котором полная интенсивность в каждой точке равна нулю во всех направлениях, за исключением некоторых направлений, заключенных внутри некоторого малого телесного угла $\Delta\omega$, образованного вокруг направления $\mathbf{n}$. Тогда, с одной стороны, полное количество энергии, протекающее через площадку dS за время dt в этих направлениях, будет по определению интенсивности равно $I\,dS\,dt\,\Delta\omega$. С другой стороны, если ϱ есть плотность лучистой энергии в точке M, то это количество энергии должно быть равно $\varrho c\,dt\,dS$, где c — скорость света. Поэтому в данном специальном случае

$$\varrho = I\,\frac{\Delta\omega}{c}.$$

В общем же случае, когда присутствует излучение, направленное в разные стороны,

$$\varrho = \frac{1}{c}\int I\,d\omega. \tag{1.4}$$

Точно такое же соотношение существует между специфической плотностью излучения ϱ_ν (определяемой тем, что $\varrho_\nu\,d\nu$ представляет количество лучистой энергии в единице объема с частотами, заключенными между ν и $\nu+d\nu$) и специфической интенсивностью излучения I_ν

$$\varrho_\nu = \frac{1}{c}\int I_\nu\,d\omega. \tag{1.5}$$

В случае если в данной точке поле излучения изотропно, т. е. интенсивность не зависит от направления, то

$$\varrho = \frac{4\pi}{c}\,I. \tag{1.4a}$$

С помощью введенного выше понятия специфической интенсивности излучения можно образовать некоторый вектор $\mathbf{H}_\nu$, который называется специфическим потоком в частоте ν в данной точке и компоненты которого определяются следующим образом: пусть α, β и γ будут углы, образованные излучением с осями координат. Тогда

$$H_{\nu x} = \int I_\nu \cos\alpha\,d\omega;\quad H_{\nu y} = \int I_\nu \cos\beta\,d\omega;$$
$$H_{\nu z} = \int I_\nu \cos\gamma\,d\omega. \tag{1.6}$$

Точно так же определяется полный поток энергии $\mathbf{H}$ в данной точке:

$$H_x = \int I\cos\alpha\,d\omega;\quad H_y = \int I\cos\beta\,d\omega;$$
$$H_z = \int I\cos\gamma\,d\omega. \tag{1.7}$$

Если мы возьмем некоторую замкнутую поверхность Σ в поле излучения и на этой поверхности элемент $d\sigma$, то разность между количеством энергии, вытекающей из Σ через элемент $d\sigma$ в единицу времени, и количеством втекающей через этот элемент лучистой энергии за тот же промежуток времени будет очевидно равна

$$H_n\, d\sigma,$$

где H_n — проекция вектора $\mathbf{H}$ на направление внешней нормали. Поэтому полное превышение энергии, вытекающей через Σ, над энергией втекающей будет равно

$$\int\limits_{(\Sigma)} H_n\, d\sigma.$$

Если взять равновесное излучение, заключенное в замкнутый сосуд (черное излучение), и сделать на границе сосуда маленькое отверстие, то из этого отверстия будет выходить излучение. Количество его, выходящее в единицу времени, будет равно $H_n s$, где s — величина отверстия. Направим ось X по нормали к s, тогда

$$H_n s = H_x s.$$

Кроме того мы знаем, что при равновесном излучении интенсивность выходящего излучения во всех направлениях должна быть одинакова. Поэтому

$$H_x = \int I \cos\alpha\, d\omega = I \int \cos\alpha\, d\omega = \pi I,$$

так как интегрирование нужно распространить лишь на направления, идущие наружу (интенсивность излучения, идущего внутрь, равна нулю). Пользуясь (1,4а), мы найдем:

$$H_x = \frac{c}{4}\varrho,$$

а так как $\varrho = aT^4$ по закону Больцманна, то

$$H_x = \frac{ac}{4} T^4,$$

и полная величина излучения, выходящего в секунду, будет:

$$sH_x = \frac{sac}{4} T^4. \tag{1.8}$$

Таким образом абсолютно-черное тело излучает с единицы поверхности в одну секунду количество энергии, равное $\frac{ac}{4} T^4$.

2. Тензор светового давления. Наряду с вектором потока излучения $\mathbf{H}$ поле излучения характеризуется также некоторым тензором второго ранга, именно тензором светового давления. Пользуясь тем обстоятельством, что каждый квант лучистой энергии $h\nu$ несет с собой импульс $\frac{h\nu}{c}$, можно легко подсчитать, что компоненты тензора давления лучистой энергии выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &p_{xx}=\frac{1}{c}\int I\cos^2\alpha\,d\omega; \qquad p_{yy}=\frac{1}{c}\int I\cos^2\beta\,d\omega;\\ &p_{zz}=\frac{1}{c}\int I\cos^2\gamma\,d\omega;\\ &p_{xy}=\frac{1}{c}\int I\cos\alpha\cos\beta\,d\omega; \; p_{xz}=\frac{1}{c}\int I\cos\alpha\cos\gamma\,d\omega;\\ &p_{yz}=\frac{1}{c}\int I\cos\beta\cos\gamma\,d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

В случае, когда излучение изотропно

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=\frac{1}{c}\,I\int\cos^2\alpha\,d\omega=\frac{4\pi I}{c}\,\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\,\varrho. \tag{1.10}$$

Недиагональные компоненты этого тензора обращаются в нуль

$$p_{xy}=p_{yz}=p_{zx}=0. \tag{1.10a}$$

Таким образом в этом случае световое давление превращается в скаляр и равно одной трети плотности лучистой энергии.

В общем же случае мы можем написать, что инвариант, получаемый как след тензора светового давления

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}=$$
$$=\frac{1}{c}\int I(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\,d\omega=\frac{1}{c}\int I\,d\omega=\varrho \tag{1.11}$$

равен плотности лучистой энергии.

3. Уравнение переноса. Рассмотрим стационарное поле излучения, т. е. такое поле, в котором интенсивность излучения не зависит от времени. Посмотрим, как будет меняться интенсивность излучения, когда мы перемещаемся в пространстве в направлении этого излучения. Рассмотрим всевозможные лучи, заключенные внутри телесного угла $d\omega$, с направлением s, входящие за время dt через площадку dS в призму, изображенную на рис. 1, причем частоты заключены между ν и $\nu+d\nu$. Энергия этих лучей, очевидно, равна $I_\nu\,d\nu\,dS\,d\omega\,dt$.

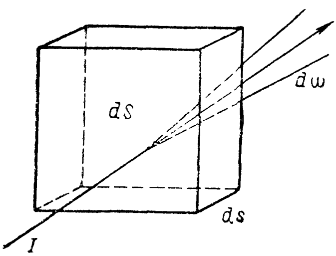

Рис. 1.

Энергия лучей, выходящих за то же время из той же призмы через $dS'=dS$ в тех же направлениях и с теми же частотами, будет определяться интенсивностью $I_\nu+dI_\nu$ на верхнем основании призмы, т. е. будет равна $(I_\nu+dI_\nu)\,d\nu\,dS\,dt\,d\omega$.

Разница между этими двумя количествами обусловливается тем, что некоторая часть вошедшей через dS в призму энергии поглощается в ней, и материя, находящаяся внутри призмы, излучает энергию во всех направлениях, в том числе в направлении s и смежных с ним. Количество поглощенной энергии должно быть пропорционально количеству вошедшей в призму энергии, а также длине элемента пути ds. Оно равно поэтому

$$a_\nu I_\nu \, d\nu \, dS \, d\omega \, dt \, ds,$$

где a_ν есть некоторый коэфициент пропорциональности, носящий название объемного коэфициента поглощения. С другой стороны, энергия, излучаемая объемом $dS \, ds$ в направлениях, заключенных внутри $d\omega$ за время dt, будет равна: $\varepsilon_\nu \, d\nu \, dS \, ds \, dt \, d\omega$, где ε_ν — объемный коэфициент излучения. Поэтому разность между вышедшей и вошедшей в призму энергиями частоты ν будет равна:

$$(I_\nu + dI_\nu) \, d\nu \, dS \, d\omega \, dt - I_\nu d\nu \, dS \, d\omega \, dt =$$
$$= \varepsilon_\nu \, d\nu \, dS \, ds \, dt \, d\omega - a_\nu I_\nu d\nu \, dS \, ds \, dt \, d\omega,$$

откуда находим:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \varepsilon_\nu - a_\nu I_\nu. \tag{1.12}$$

Полученное уравнение называется уравнением переноса и позволяет вычислить специфическую интенсивность I_ν, если только известны объемные коэфициенты излучения и поглощения в каждой точке вдоль пути луча. При этом, конечно, полученное решение будет еще зависеть от предельных условий, которым подчиняется специфическая интенсивность излучения.

В самом деле, пусть s будет длина пути луча, отсчитанная от какой-нибудь его точки. Тогда решение уравнения (1.12) будет иметь вид

$$I_\nu(s) = Ce^{-\int\limits_{-\infty}^{s} a_\nu \, ds} + \int\limits_{-\infty}^{s} \varepsilon_\nu(t) \, e^{-\int\limits_{t}^{s} a_\nu(u) \, du} \, dt. \tag{1.13}$$

Очевидно, что смысл постоянной C заключается в том, что она равна специфической интенсивности излучения при $s = -\infty$. В дальнейшем мы используем это решение.

4. Расходимость тензора светового давления. Вводя направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ для направления излучения, мы можем переписать уравнение переноса следующим образом:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial I_\nu}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial I_\nu}{\partial z} \cos\gamma = \varepsilon_\nu - a_\nu I_\nu.$$

Умножая на $\cos\alpha$, потом на $\cos\beta$ и затем на $\cos\gamma$ и интегрируя по всем направлениям, мы получим три диференциальных уравнения, которые будут действительны для каждой частоты в отдельности:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\int I_\nu \cos^2\alpha\, d\omega+\frac{\partial}{\partial y}\int I_\nu \cos\alpha\cos\beta\, d\omega+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\int I_\nu\cos\alpha\cos\gamma\, d\omega=-a_\nu\int I_\nu\cos\alpha\, d\omega\\
&\frac{\partial}{\partial x}\int I_\nu\cos\alpha\cos\beta\, d\omega+\frac{\partial}{\partial y}\int I_\nu\cos^2\beta\, d\omega+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\int I_\nu\cos\beta\cos\gamma\, d\omega=-a_\nu\int I_\nu\cos\beta\, d\omega \qquad (1.14)\\
&\frac{\partial}{\partial x}\int I_\nu\cos\alpha\cos\gamma\, d\omega+\frac{\partial}{\partial y}\int I_\nu\cos\beta\cos\gamma\, d\omega+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\int I_\nu\cos^2\gamma\, d\omega=-a_\nu\int I_\nu\cos\gamma\, d\omega.
\end{aligned}
$$

Интегрируя эти уравнения по всем частотам и деля на c, а также пользуясь (6) и (9), мы найдем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}=-\frac{1}{c}\int a_\nu H_{\nu x}d\nu\\
&\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}=-\frac{1}{c}\int a_\nu H_{\nu y}d\nu \qquad (1.15)\\
&\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}=-\frac{1}{c}\int a_\nu H_{\nu z}d\nu.
\end{aligned}
$$

Если символ P обозначает тензор светового давления, то эти равенства сокращенно могут быть написаны так:

$$
\operatorname{div}\mathbf{P}=-\frac{1}{c}\int a_\nu\,\mathbf{H}_\nu d\nu. \qquad (1.15')
$$

Применим эти уравнения к одному частному случаю. Пусть мы имеем среду, состоящую из плоско-параллельных слоев, т. е. такую среду, в которой все физические свойства: плотность, давление и пр. зависят только от одной координаты, например z. В том числе только от z должны зависеть и коэфициенты поглощения и излучения. Очевидно, что, поскольку мы имеем дело с излучением этой материальной среды (т. е. не рассматриваем излучение, идущее извне), специфическая интенсивность излучения будет зависеть только от координаты z и угла γ (который можно назвать зенитным расстоянием), но не зависит от координат x и y, а также от углов α и β.

В таком случае все недиагональные элементы тензора светового давления обратятся в нуль, $H_{\nu x}=0$, $H_{\nu y}=0$, и мы получим вместо (1.15):

$$
\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}=-\frac{1}{c}\int a_\nu H_{\nu z}d\nu. \qquad (1.16)
$$

Первые два равенства для нас тривиальны, так как p_{xx} и p_{yy}, как величины, определяемые полем излучения, уже из соображений симметрии не должны зависеть от координат x и y. Из тех же соображений очевидно далее, что $p_{xx} = p_{yy}$.

5. Расходимость вектора потока излучения. Мы имели выше, что превышение количества энергии, вытекающей из данного объема, над энергией, втекающей в него, равно

$$\int\limits_{(\Sigma)} H_n d\sigma.$$

С другой стороны, если мы обозначим через η плотность источников лучистой энергии (в случае стоков η имеет отрицательное значение), то та же величина выражается объемным интегралом

$$\int\limits_{(V)} \eta\, d\tau,$$

где интегрирование распространено на объем, ограниченный поверхностью Σ. Итак

$$\int\limits_{(\Sigma)} H_n d\sigma = \int\limits_{(V)} \eta\, d\tau.$$

Но по теореме Гаусса

$$\int\limits_{(\Sigma)} H_n d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{H}\, d\tau,$$

поэтому

$$\int\limits_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{H}\, d\tau = \int\limits_{(V)} \eta\, d\tau.$$

Так как это равенство имеет место для всякого произвольно взятого объема, то

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \delta, \tag{1. 17}$$

т. е. расходимость вектора потока лучистой энергии равна плотности источников этой энергии. Здесь мы оставляем в стороне вопрос о природе возможных источников или стоков, т. е. вопрос о том, за счет каких других видов энергии происходит образование лучистой энергии. В частном случае, когда в нашем объеме нет источников лучистой энергии,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{1.18}$$

В рассмотренном выше случае плоско-параллельных слоев, когда $H_{vx} = H_{vy} = 0$ и следовательно и $H_x = H_y = 0$, вместо (1.17) мы имеем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = \eta. \tag{1.19}$$

В случае же, если $\eta = 0$, т. е. в рассматриваемых слоях источники энергии отсутствуют, мы получаем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \text{ или } H_z = \text{const}. \tag{1.20}$$

Во внешних слоях звезд, которые в первом приближении можно принять за плоско-параллельные, как мы увидим далее, нет источников лучистой энергии. Поэтому в них H_z, т. е. поток, направленный наружу, есть величина постоянная.

Если мы допустим, что коэфициент поглощения α не зависит от частоты, т. е. постоянен вдоль спектра, то в этом случае

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = -\frac{H_z}{c}\,\alpha.$$

Из соображений симметрии очевидно, что p_{zz} не должно зависеть от x и y. Поэтому знак частного диференцирования мы можем заменить обыкновенным диференцированием

$$\frac{dp_{zz}}{dz} = -\frac{H_z}{c}\,\alpha, \tag{1.21}$$

откуда

$$p_{zz} = \frac{H_z}{c}\int\limits_z^\infty \alpha\,dz + (p_{zz})_{z=\infty}. \tag{1.22}$$

Таким же образом, зная поток, мы можем вычислить световое давление и в других случаях.

6. Рассеяние, флуоресценция и истинное поглощение. В § 3 мы дали чисто формальное определение объемного коэфициента поглощения α_ν, не вникая в сущность тех физических процессов, которыми он обусловливается. Под поглощением мы понимали там просто ослабление в материальной среде излучения, идущего в определенном направлении. Такое ослабление может происходить под влиянием разных причин и в соответствии с этим должно трактоваться в каждом случае особо. Рассмотрим различные виды поглощения в отдельности.

1. Чистое рассеяние. Рассеянием называется тот случай, когда поглощенная энергия каждой длины волны излучается материей во все стороны в той же самой длине волны. Для этого необходимо, чтобы поглощенный свет не превращался в энергию движения частиц материи (тепловую). Примером рассеяния могут служить Томсоновское рассеяние света свободными электронами, Релеевское рассеяние света молекулами в атмосфере, поглощение и испускание атомами квантов соответствующих резонансных линий и т. д. Как выражаются математически условия чистого рассеяния? Полное количество энергии, излучаемое элементом объема $dSds$ по направлениям, заклю-

ченным внутри $d\omega$, за время dt в частотах между ν и $\nu+d\nu$, равно

$$\varepsilon_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\omega \, d\nu.$$

Полное количество энергии, излученное за тот же промежуток времени по всем направлениям в тех же частотах, будет $4\pi\varepsilon_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\nu$, если количество излучаемой энергии не зависит от направления. С другой стороны, мы видели, что количество энергии, поглощенной за то же время в тех же частотах из лучей, идущих в направлениях $d\omega$, будет равно $a_\nu I_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\nu \, d\omega$. Легко видеть, что для излучения, направление которого не совпадает с осью нашего элементарного цилиндра, количество поглощенной энергии в нем выражается таким же образом. Поэтому полное количество энергии, поглощаемой из излучений, идущих в различных направлениях, нашим элементом объема за время dt в частотах между ν и $\nu+d\nu$, будет равно

$$a_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\nu \int I_\nu \, d\omega.$$

Так как энергия, поглощаемая в рассматриваемых частотах излучается в тех же частотах, то

$$4\pi\varepsilon_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\nu = a_\nu \, dS \, ds \, dt \, d\nu \int I_\nu \, d\omega$$

или

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{4\pi} \, a_\nu \int I_\nu \, d\omega. \tag{1.23}$$

Поэтому уравнение переноса для этого случая можно написать так [см. (1. 12)]:

$$\frac{dI}{ds} = a_\nu \left[\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} - I_\nu \right]. \tag{1.24}$$

Вместо термина „чистое рассеяние“ в литературе часто встречается другой термин: „монохроматическое лучевое равновесие“. Последнее название связано с тем, что при чистом рассеянии количество энергии, излученной в данной частоте, равно количеству энергии, поглощенной в ней.

2. Флуоресценция. Поглощая кванты определенной частоты, материя может иногда вместо квантов той же частоты или, точнее, наряду с ними испускать кванты других частот. Так например, атом водорода, поглотив квант линии L_γ (третья частота лаймановской серии) и перейдя из состояния $1S$ в состояние $4P$, может в результате последовательных спонтанных переходов $4P \to 3S$, $3S \to 2P$, $2P \to 1S$ испустить три кванта, принадлежащих линиям P_α, H_α, L_α (основные линии пашеновской, бальмеровской и лаймановской серий) [1]. Такого рода процессы носят название флуоресценции.

---

[1] Изложение систематики атомных спектров читатель найдет в книге: С. Э. Фриш, Атомные спектры, ГТТИ, 1934.

Мы несколько расширим понятие флуоресценции, включив сюда и те случаи, когда вместо нескольких квантов малых частот испускается меньшее число квантов больших частот. Вообще под флуоресценцией мы будем понимать такие процессы, когда атом, поглощая несколько квантов, частоты которых соответствуют частотам его определенных линий, излучает вместо них несколько (вообще говоря другое число) квантов других частот. При этом сумма энергий поглощенных квантов равна сумме энергий излученных. Важно, что при флуоресценции, так же как и при рассеянии, поглощенная энергия не переходит в кинетическую энергию движущихся частиц материи.

Ясно, что при флуоресценции уже не будет, вообще говоря, монохроматического лучевого равновесия в каждой частоте и вместо уравнения (1. 23) мы будем иметь лишь равенство соответствующих сумм поглощенных и излученных во всех рассматриваемых частотах энергий:

$$\sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum \alpha_{\nu} \int I_{\nu}\, d\omega. \tag{1.25}$$

Относительное распределение излученных энергий по частотам определяется распределением атомов (или молекул) по различным возбужденным состояниям. Это распределение определяется специфическими плотностями энергии в частотах линий данного атома. Поэтому обе проблемы распространения излучения и возбуждения атомов в случае флуоресценции надо решать совместно.

3. Истинное поглощение. Под этим термином понимаются те случаи, когда поглощенная энергия превращается в тепловую энергию движения частиц. Обратный процесс происходит тогда, когда тепловая энергия переходит в излучение. В качестве первого примера можно привести случаи, когда поглощаются кванты каких-либо линий, идущие на возбуждение того или иного атома, а затем эта энергия возбуждения под влиянием удара второго рода переходит в кинетическую энергию частиц. Точно так же могут происходить обратные процессы, когда при ударах первого рода атомы возбуждаются за счет их кинетической энергии, а затем излучают энергию возбуждения. Другим примером истинного поглощения является поглощение светового кванта при фотоэлектрической ионизации атома какого-нибудь элемента. После такой ионизации оторванный электрон может рекомбинироваться с ионами других элементов и дать излучение совершенно других длин волн. Даже рекомбинация с ионами того же элемента может дать другую частоту, так как после рекомбинации атом может оказаться в таком квантовом состоянии, энергия которого отличается от энергии исходного состояния. Чтобы оценить, какие из вышеописанных процессов рассеяния, флуоресценции и чистого поглощения представляют наибольшую важность для нас в том или ином конкретном случае, надо проанализировать имеющиеся условия.

7. Коэфициент непрозрачности (Росселандово среднее). Разделим уравнения (1.14) на α_ν и проинтегрируем по частотам. Тогда, например, первое из них дает:

$$\int \cos^2 \alpha \, d\omega \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial x} d\nu + \\ + \int \cos \alpha \cos \beta \, d\omega \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial y} d\nu + \\ + \int \cos \alpha \cos \gamma \, d\omega \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial z} d\nu = -H_x. \tag{1.14}$$

Если мы попытаемся в написанных интегралах заменить α_ν его средним значением, то это среднее будет гармоническим средним, причем при вычислении среднего веса будут пропорциональны градиентам $\frac{\partial I_\nu}{\partial x}$, $\frac{\partial I_\nu}{\partial y}$, $\frac{\partial I_\nu}{\partial z}$. Строго говоря, в каждом из этих интегралов средние будут различны в разных случаях, вследствие того, что будет различным распределение весов по частотам, а также будет существовать зависимость среднего значения от направления.

Если мы имеем среду, отличающуюся высокой степенью непрозрачности (например, внутренние слои звезд), которая находится в стационарном состоянии, то можно ожидать, что интенсивность излучения (специфическая) в каждой точке этой среды определится почти той же формулой Планка, что и распределение специфической интенсивности излучения в совершенно замкнутом сосуде, находящемся в состоянии равновесия. Разница будет заключаться лишь в том, что температура, являющаяся в данном случае параметром, характеризующим распределение специфической интенсивности по частотам, может меняться от точки к точке. Если удовольствоваться этим приближением, то можно написать, что

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial I_\nu}{\partial y} = \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}; \\ \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{1.26}$$

Следовательно, если α_2 определяется равенством

$$\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{\partial I_\nu}{\partial x} d\nu = \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial x} d\nu, \tag{1.27}$$

то в силу равенства, вытекающего из (1.27) и (1.26):

$$\alpha_2 = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial x} d\nu}{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial x} d\nu} = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} d\nu}{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} d\nu} = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu},$$

и таких же равенств для других двух средних значений в интегралах, входящих в (1.14), во всех трех случаях наше среднее гармоническое будет иметь одно и то же значение:

$$\alpha_2 = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T}\, d\nu}{\int \frac{1}{\alpha_\nu}\, \frac{\partial I_\nu}{\partial T}\, d\nu}. \tag{1.28}$$

Это среднее называется коэфициентом непрозрачности, или „Росселандовым средним“, и его введение позволяет написать вместо (1.14′):

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = -\frac{\alpha_2}{c} H_x$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\alpha_2}{c}\, \mathbf{H}. \tag{1.29}$$

Во многих задачах поток **H** является заданной функцией координат и поэтому (1.29) позволяет судить о распределении светового давления, если только известно α_2. Вот почему в астрофизических исследованиях это Росселандово среднее играет очень большую роль.

8. Влияние линий поглощения на Росселандово среднее. Наличие линий поглощения в спектре можно математически выразить тем, что коэфициент поглощения α_ν имеет ряд острых максимумов, положения которых соответствуют длинам волн этих линий. Чтобы узнать влияние этих максимумов на Росселандово среднее, рассмотрим пример. Допустим, что коэфициент поглощения в непрерывном спектре характеризуется плавной кривой $\alpha_\nu = \alpha_\nu^0$ и что внутри линий поглощения он в определенное количество n раз больше значения коэфициента поглощения в соседних областях непрерывного спектра. Пусть все линии поглощения имеют одинаковую ширину δ и находятся на одинаковых расстояниях друг от друга. Обозначим длину промежутка непрерывного спектра между двумя линиями поглощения через D. Тогда коэфициент α_ν можно представить с помощью формулы

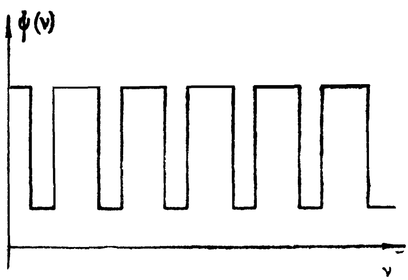

Рис. 2.

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^0 \psi_\nu, \tag{1.30}$$

где ψ_ν есть кривая, изображенная на рис. 2. Очевидно, что интеграл $\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \int \frac{1}{\alpha_\nu^0 \psi_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu$ можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{1}{a_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \int\limits_{(C)} \frac{1}{a_\nu^0 \psi_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu + \int\limits_{(L)} \frac{1}{a_\nu^0 \psi_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu =$$

$$= \int\limits_{(C)} \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu + \frac{1}{n} \int\limits_{(L)} \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu, \tag{1.31}$$

где C есть совокупность участков непрерывного спектра, а L — совокупность участков, входящих в линии. Так как между двумя линиями, т. е. на протяжении D, величины a_ν^0 и $\frac{\partial I_\nu}{\partial T}$ можно считать неизменными, то

$$\int\limits_{(C)} \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \sum \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} D =$$

$$= \frac{D}{D+\delta} \sum \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} (D+\delta) = \frac{D}{D+\delta} \int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu,$$

где интегрирование в правой части распространено уже на весь спектр без вырезов. Точно так же

$$\int\limits_{(L)} \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \sum \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \delta =$$

$$= \frac{\delta}{D+\delta} \sum \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} (D+\delta) = \frac{\delta}{D+\delta} \int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu.$$

Сопоставляя эти результаты с (1.31), находим:

$$\int \frac{1}{a_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{D}{D+\delta} \int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu +$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}\delta}{D+\delta} \int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{D+\frac{1}{n}\delta}{D+\delta} \int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu,$$

и, следовательно, для Росселандова среднего имеем:

$$a_2 = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{1}{a_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu} = \frac{D+\delta}{D+\frac{\delta}{n}} \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu};$$

в то же время, если бы не было линий поглощения, то Росселандово среднее a_2^0 выражалось бы через:

$$a_2^0 = \frac{\int \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{1}{a_\nu^0} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu}.$$

Поэтому

$$a_2 = \frac{D+\delta}{D+\frac{\delta}{n}}\, a_2^0. \tag{1.32}$$

Так как $n \gg 1$ и δ мало по сравнению с D, то a_2 должно быть очень близко к a_2^0. Даже если $n=\infty$, т. е. коэфициент поглощения в линиях бесконечно велик, мы получаем редукционный фактор $\frac{D}{D+\delta}$ для учета влияний линий. При $\delta=\frac{1}{20}$, т. е. при допущении, что ширина (суммарная) линий достаточно велика, мы получаем опять только фактор $\frac{21}{20}$, т. е. число, практически очень близкое к единице. Мы увидим далее, что обычные методы вычисления a_2 настолько грубы, что должны приводить к большим ошибкам, достигающим в лучшем случае нескольких десятков процентов. Поэтому, несмотря на то, что в линиях поглощения коэфициент поглощения может быть и очень велик, мы можем при вычислении Росселандова среднего вовсе не учитывать наличия линий.

Точные вычисления Росселандова среднего или „коэфициента непрозрачности" в общем случае очень трудно провести до конца. Значительно легче произвести вычисление „среднего коэфициента поглощения", которое определяется согласно формуле

$$a_0 = \frac{\int\limits_0^\infty a_\nu I_\nu d\nu}{\int\limits_0^\infty I_\nu d\nu}.$$

Мы видели выше, что главным отличием Росселандова среднего является то, что на него мало влияет наличие отдельных резких и узких максимумов коэфициентов поглощения, т. е. спектральных линий. Практически это влияние равно нулю. Между тем при вычислении среднего коэфициента поглощения это влияние может быть значительным. Отбросив эти максимумы, т. е. считая, что никаких спектральных линий нет, мы можем надеяться получить значение среднего коэфициента поглощения, близкое к значению коэфициента непрозрачности.

Итак, следует учитывать только непрерывное поглощение. Оно, в свою очередь, складывается из двух частей: 1) поглощения, сопровождаемого переходом электрона из свободного состояния в свободное, конечно, в поле какого-нибудь иона, которое в первом приближении можно считать кулоновским. Это поглощение будет пропорционально как плотности электронов, так и плотности ионов; 2) поглощения, происходящего при переходах электронов из связанного состояния в свободное, т. е. того поглощения, которое происходит за границами всех спектральных серий. Мы дадим окончательный результат, полученный Чандрасекаром для коэфициента поглощения, рассчитанного на один атом:

$$\bar{a} = \frac{40}{\pi^4 \sqrt{3}} \frac{c^2 h^4}{em (2\pi m)^{3/2}} \left\{ \sum_{r=1} \chi_r \left(1 + \frac{2,43}{kT} \chi_r\right) x_{r+1} \frac{N_e}{(kT)^{7/2}} .\right\}$$

Здесь e и m суть заряд и масса электрона, x_{r+1} есть доля атомов, ионизованных r раз, χ_r есть r-тый потенциал ионизации, N_e — число электронов в единице объема.

Наличие множителя $1 + \frac{2,43}{kT} \chi_r$ при x_{r+1} является явным выражением того факта, что каждому типу ионов соответствуют два возможных процесса поглощения. В этом множителе единица характеризует переходы из свободного состояния в свободное, а член $\frac{2,43}{kT} \chi_r$ указывает на переходы из связанных состояний в свободные. Чтобы узнать относительное значение этих членов, достаточно, например, взять водородный атом, для которого $\chi = 13,54\,V$. Тогда $\frac{2,43}{kT} \chi_r = \frac{3,83 \cdot 10^5}{T}$. Откуда следует, что при $T < 10^5$, т. е. при температурах, царящих во внешних слоях звезд, главную роль играет второй член. Несомненно, что водородное поглощение играет крупную роль во внешних слоях более горячих звезд.

Короче говоря, выражение для коэфициента поглощения на один атом имеет приближенно следующую форму:

$$\bar{a} = \sum_r \frac{c_1 N_e x_{r+1} \chi_r^2}{T^{9/2}},$$

где суммирование распространено по всем состояниям ионизации, а c_1 — постоянная. Обычно, однако, в этой сумме один из членов имеет значение, значительно большее, чем другие. Это происходит вследствие того, что огромное большинство атомов находится обычно в одном определенном состоянии ионизации. Для этого состояния (пусть это будет состояние r-кратной ионизации) x_{r+1} близко к единице. Все остальные x близки к нулю. Поэтому можно просто написать:

$$\bar{a} = \frac{c_1 N_e x_{r+1} \chi_r^2}{T^{9/2}}$$

и лишь следить за тем, чтобы взять r таким, чтобы в рассматриваемом интервале температур и плотностей большинство атомов было бы ионизовано r раз; следует заметить, что рассматриваемый, наиболее крупный член происходит от поглощения света атомами, ионизованными $r-1$ раз. Поэтому χ_r есть потенциал ионизации поглощающих атомов, а x_{r+1} есть доля атомов, находящихся в следующей стадии ионизации по сравнению с атомами, играющими наибольшую роль в поглощении.

Если в единице объема находятся n атомов, то объемный коэфициент поглощения будет приближенно равен

$$a = n\bar{a} = \frac{c_1 x n p_e \chi_r^2}{kT^{11/2}},$$

где p_e — парциальное давление свободных электронов, равное $n_e kT$, а вместо x_{r+1} мы написали просто x, тем самым условившись под x понимать долю атомов, находящихся в стадии ионизации, непосредственно следующей после той стадии, в которой находятся атомы, играющие наибольшую роль в поглощении. Так как

$$n = \frac{\varrho}{b \cdot m_{\mathrm{H}}},$$

где ϱ — плотность, b — атомный вес, а m_{H} — масса водородного атома, то

$$a = c_2 \frac{x p_e \varrho}{T^{11/2}} \cdot \frac{\chi^2}{b},$$

где c_2 — новая постоянная, равная согласно Чандрасекару в CGS-системе $5{,}62 \cdot 10^{19}$. Для коэфициента поглощения на единицу массы имеем отсюда

$$\varkappa = \frac{a}{\varrho} = c_2 \frac{x p_e}{T^{11/2}} \frac{\chi^2}{b}.$$

Этой формулой мы будем пользоваться в дальнейшем неоднократно.

II. ЗВЕЗДНЫЕ ФОТОСФЕРЫ

Основные наши сведения о звездных атмосферах основаны на изучении их спектров, а также на непосредственном изучении атмосферы ближайшей к нам звезды — Солнца. Наблюдения показывают, что спектр огромного большинства звезд не испытывает изменений по крайней мере в течение десятка лет, а вероятно и в течение более продолжительных промежутков времени. Отсюда мы заключаем, что атмосферы этих звезд находятся в некотором установившемся состоянии. Очевидно, однако, что спектр Солнца для далеко расположенного наблюдателя (которому оно представлялось бы точкой) тоже казался бы неизменным, хотя непосредственное наблюдение указывает на большие физические изменения, происходящие в отдельных местах солнечной поверхности. Поэтому вероятно, что гипотеза о стационарном состоянии внешних слоев звезд тоже верна лишь в общем и среднем.

Наблюдения показывают, что солнечная атмосфера состоит из трех слоев, которые непрерывно переходят один в другой. Самый внутренний слой — ф о т о с ф е р а, от которой непосредственно достигает до нас та подавляющая часть излучения звезды, которая испускается в непрерывном спектре. Над фото-