меровской серии энергия переносится в частоты бальмеровских линий. Таким образом по интенсивностям бальмеровских линий можно судить не об интенсивности лаймановской области, а об интенсивности спектра за границей бальмеровской серии.

Мы привели здесь рассуждение для водорода, потому что схема процесса в этом случае наиболее проста. Однако надо отметить, что рассматриваемый эффект в случае обычных звезд Вольфа-Райе играет роль не для водорода, а для ионов с высоким потенциалом ионизации.

В случае же звезд типа P Cygni указанный эффект скажется и на температурах, определенных по водородным линиям [1]).

4. Истечение массы. С точки зрения космогонической имеет большое значение вопрос о количестве массы, выбрасываемой в результате непрерывного истечения звездами Вольфа-Райе. Применение формулы (11. 15), которая может быть распространена и на этот случай, показывает, что ежегодная убыль массы порядка 10^{-5} массы Солнца. В случае звезд P Cygni эта ежегодная убыль в несколько раз больше.

XIII. ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ ЗВЕЗД

Проблема внутреннего строения звезд является одной из наиболее трудных проблем теоретической астрофизики. В настоящее время мы, повидимому, еще далеки от ее разрешения, и не исключена возможность, что в ближайшем будущем мы будем иметь радикальное изменение взглядов, господствующих ныне в этой области. Поэтому в нашей книге мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями, касающимися современного состояния этого вопроса.

Для проблемы внутреннего строения звезд характерно то, что она теснейшим образом связана с проблемой источников звездной энергии. С одной стороны, источники звездной энергии, их мощность, зависят, несомненно, от условий, господствующих внутри звезды. С другой стороны, характер и распределение источников звездной энергии влияют на распределение температур в звезде, а, следовательно, и на ее строение. Отсюда ясно, что полная теория внутреннего строения звезд должна включать в себе решение проблемы об источниках звездной энергии. Именно вопрос об источниках звездной энергии и делает столь трудным решение задачи о внутреннем строении звезд.

С точки зрения внешнего наблюдателя каждая звезда характеризуется значениями трех физических параметров: массы (M), светимости (L) и радиуса (R). Эти три параметра при переходе от одной звезды к другой не меняются независимо друг от друга. Как показывают наблюдения, для большинства звезд, за

---

[1]) Возбуждения в туманных оболочках малого радиуса разобраны в работах: Амбарцумиан, Monthly Notices, **95**, 469, 1935; Горделадзе, Zeitschrift für Astrophysik, **13**, 48, 1936.

исключением белых карликов, существует почти строгая функциональная зависимость между массой и светимостью. Эта зависимость в первом грубом приближении может быть представлена формулой:

$$\frac{M}{M_\odot}=\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{0,3},$$

где $M_\odot$ и $L_\odot$ представляет собой соответственно массу и светимость солнца. Что касается радиуса, то, как показывают наблюдения, он связан некоторой зависимостью, правда, не строго функциональною, а корреляционною, со светимостью. Эта зависимость обычно представляется в виде хорошо известной диаграммы Рессела. В ее обычном виде эта диаграмма является зависимостью между светимостью и температурой. Однако на основании соотношения:

$$L=\pi R^2 acT_{\text{eff}}^4$$

ее можно преобразовать в диаграмму, связывающую светимость с радиусом.

Упомянутые две зависимости: соотношение между массой и светимостью и диаграмма Рессела приводят к тому, что только один из указанных трех параметров может меняться совершенно независимо. За такой параметр можно принять массу. Светимость целиком определяется заданием массы; радиус же, при данной массе может иметь значения, близкие к одному (при малых массах) или двум (при большой массе) определенным средним значениям.

Указанная двузначность радиуса при больших массах связана с тем, что при больших L зависимость R от L, полученная из диаграммы Рессела, является двузначной. Задачей теории внутреннего строения звезд является вывести указанные два наблюдаемых соотношения, т. е. получить теоретически L и R для заданного M.

Как указывалось, полный ответ на этот вопрос связан с выяснением природы источников звездной энергии, ибо иначе невозможно говорить о *физической теории* внутреннего строения звезд. Однако можно поставить вопрос в несколько другой плоскости и притом таким образом, что его разрешение уже не будет являться безнадежным.

Дело в том, что указанные эмпирические соотношения должны быть получены как следствия из уравнений, характеризующих равновесие звезды. Надо думать, что следствием из этих уравнений будет вывод, что всякая масса в состоянии равновесия излучает определенное количество (L) энергии в единицу времени и может иметь те или иные значения радиуса. Среди уравнений равновесия, приводящих к нашим двум соотношениям между L, M и R и лежащих в основе теории внутреннего строения звезд, должно быть одно, дающее плотность распределения источников звездной энергии, в зависимости от других физических величин в данной точке (температура, давление и пр.). Отсутствие этого соотношения делает задачу неопределенной. Нехватает одного из начальных уравнений. Поэтому надо ожидать, что и вместо двух уравнений между интересующими нас величинами L, M и R мы можем получить только одно уравнение. По существу работа большинства авторов в области внутреннего строения звезд и заключалась до сих пор в решении этой неопределенной задачи, поскольку не делалось ясных физических гипотез о природе источников энергии. Однако получение хотя бы одной зависимости вида

$$f(L, M, R) = 0$$

представляет огромный интерес и, повидимому, является необходимым этапом на пути построения полной теории внутреннего строения звезд.

Такие теории, доведенные до конкретных числовых данных, были построены при упрощающих предположениях некоторыми авторами. Из них здесь следует упомянуть:

1) **Теорию Эддингтона** [1]. В ней делается предположение, что звезда целиком состоит из идеального газа. При высоких температурах, господствующих внутри звезд, Ван-дер-Ваальсовы силы действительно не играют никакой роли.

Однако предположение Эддингтона, что этот идеальный газ является классическим, т. е. пренебрежение возможностью вырождения в центральных областях в смысле статистики Ферми-Дирака, требует специального обоснования.

Эддингтон предполагает, что сделанные предположения справедливы для всех звезд, не являющихся белыми карликами, и применяет к ним свои выводы.

2) **Теория Чандрасекара для белых карликов** [2]. В ней предполагается, что звезда целиком состоит из сильно вырожденного газа. Это предположение справедливо только для звезд с очень большой средней плотностью, какими являются белые карлики. Однако и у них фотосферические слои, т. е. самые внешние слои состоят из идеальных газов, и сделанное предположение является лишь первым приближением.

Мы не будем касаться здесь теорий, которые рассматривают звезды как двухфазные конфигурации, так как рассмотрение их завело бы нас слишком далеко. Это не означает, что мы отвергаем существование таких звезд в природе. Мы остановимся здесь лишь на двух упомянутых простых теориях, чтобы проиллюстрировать направление, в котором велись до сих пор работы.

1. Теория Эддингтона. Поскольку речь идет о статических (а не о переменных) звездах, можно считать, что они находятся в состоянии механического равновесия. Далее будем считать звезду сферически-симметричной, т. е. будем пренебрегать вращением, вызывающим отклонения от сфериче-

[1] Eddington-Internal Constitution of the Stars Cambridge, 1926.

[2] Monthly Notices, **95**, 207, 1935.

ской симметрии. Тогда все физические величины, как, например, температура T, газовое давление p, световое давление p', ускорение силы тяжести g, будут функциями расстояния до центра r. В этом предположении уравнение гидростатического равновесия имеет форму:

$$\frac{d(p+p')}{dr}=-g\varrho, \tag{13.1}$$

где ϱ — плотность. Для ускорения силы тяжести имеем:

$$g=\frac{GM(r)}{r^2}, \tag{13.2}$$

где G — гравитационная постоянная, а $M(r)$ — масса, заключенная в сфере с радиусом r вокруг центра звезды.

Из уравнения переноса путем умножения на $\cos\theta$ и интегрирования следует, что

$$\frac{dp'}{dr}=-\frac{\alpha H}{c}, \tag{13.3}$$

где α — объемный коэфициент поглощения, а H — поток излучения через единицу поверхности. Представив α в виде

$$\alpha=\varkappa\varrho,$$

где $\varkappa$ — коэфициент поглощения, отнесенный к массе, мы перепишем (13.3) в виде:

$$\frac{dp'}{dr}=\frac{\varkappa\varrho H}{c}, \tag{13.4}$$

где c — скорость света.

Деля (13.1) на (13.4), имеем:

$$\frac{d(p+p')}{dp'}=\frac{cg}{\varkappa H}. \tag{13.5}$$

Обозначим теперь через $L(r)$ полное количество энергии, освобождаемое в единицу времени источниками, находящимися в сфере радиуса r. Очевидно, что в стационарном состоянии $L(r)$ должно быть равно количеству энергии, вытекающей в единицу времени через поверхность этой сферы наружу. Если основным способом передачи энергии в звезде является лучеиспускание (что справедливо при столь высоких температурах), то интересующее нас количество вытекающей энергии равно $4\pi r^2 H$. Поэтому

$$H=\frac{L(r)}{4\pi r^2}. \tag{13.6}$$

Разделив (13.6) на (13.2), получаем:

$$\frac{H}{g}=\frac{1}{4\pi G}\frac{L(r)}{M(r)}. \tag{13.7}$$

Отношение $\frac{L(r)}{M(r)}$ представляет собою среднюю мощность источников на 1 *г* массы внутри сферы с радиусом r. Мы не будем делать никаких предположений об абсолютном значении этой мощности. Мы допустим только, что отношение $\frac{L(r)}{M(r)}$, т. е. эта средняя мощность не зависит от r. Это будет справедливо, если мощность источников на единицу массы во всей звезде будет одинакова. Если, далее, примем, что коэфициент поглощения является постоянным, то

$$\varkappa \frac{H}{g} = \frac{\varkappa}{4\pi G} \frac{L(r)}{M(r)} = \text{const} = \frac{\varkappa}{4\pi G} \frac{L}{M}, \tag{13.8}$$

где L и M равны значениям $L(r)$ и $M(r)$ на внешней границе звезды соответственно, т. е. представляют собою светимость и массу звезды.

Поэтому (13.5) можно переписать в виде:

$$\frac{d(p+p')}{dp'} = \frac{4\pi cGM}{\varkappa L}. \tag{13.9}$$

Обозначим постоянную для данной звезды величину

$$\frac{\varkappa L}{4\pi cGM} = 1 - \beta, \tag{13.10}$$

где β, как видно из (13.9), должно быть заключено между нулем и единицей. Согласно (13.10) вместо (13.9) можем написать

$$dp' = (1-\beta)\, d(p+p'). \tag{13.11}$$

Интегрируя это уравнение и имея в виду, что на внешней границе $p = p' = 0$, находим:

$$p' = (1-\beta)(p+p'); \quad p = \beta(p+p'); \quad p = \frac{\beta}{1-\beta} p' \tag{13.12}$$

Во внутренних слоях звезды мы можем принять, что, как и при термодинамическом равновесии,

$$p' = \frac{1}{3} aT^4. \tag{13.13}$$

С другой стороны, уравнение идеальных газов, введение которого является весьма существенным для теории Эддингтона, дает

$$p = \frac{R}{\mu} \varrho T, \tag{13.14}$$

где R—постоянная Клапейрона и μ—молекулярный вес.

Сопоставляя (13.14) с (13.12) и (13.13), получаем:

$$\varrho = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\mu a}{3R} T^3. \tag{13.15}$$

Таким образом плотность внутри звезды меняется пропорционально кубу температуры.

С другой стороны (13.1), (13.2) и (13.12) дают:

$$\frac{1}{1-\beta}\frac{dp'}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\varrho$$

или, в силу (13.13):

$$\frac{4a}{3(1-\beta)}\frac{r^2}{\varrho}T^3\frac{dT}{dr} = -GM(r).$$

Введя выражение для $\frac{T^3}{\varrho}$ из (13.13), находим:

$$\frac{4R}{\beta\mu}r^2\frac{dT}{dr} = -GM(r), \tag{13.16}$$

Диференцируя и принимая во внимание, что

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\varrho \tag{13.17}$$

получаем:

$$\frac{R}{\pi\beta\mu G}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -\varrho. \tag{13.18}$$

Подставляя сюда выражение для ϱ из (13.15), имеем:

$$\frac{1-\beta}{\beta^2}\frac{3R^2}{\pi\mu^2 aG}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -T^3. \tag{13.19}$$

Решение этого уравнения должно дать T как функцию r и тем самым ответ на всю задачу.

Введем вместо T новую переменную θ, отличающуюся от нее постоянным множителем:

$$\theta^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta}\frac{\pi\mu^2 aG}{3R^2}T^2. \tag{13.20}$$

Тогда уравнение (13.19) примет форму:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^3. \tag{13.21}$$

Это уравнение рассматривалось в свое время Эмденом (Emden) и поэтому называется уравнением Эмдена [1]).

Найдем теперь предельные условия, которым должна удовлетворять функция θ.

Так как $\lim\limits_{r\to 0}\frac{M(r)}{r^2} = 0$, то из (13.16) ясно, что $\frac{dT}{dr} = 0$ при $r = 0$. Таким образом в центре $\frac{d\theta}{dr} = 0$; на границе же звезды при $r = r_1$ мы должны иметь $\theta = 0$ (температура столь низка, что ее можно положить равной нулю).

Для нахождения решения, удовлетворяющего обоим нашим условиям, найдем сперва какое-либо одно решение уравнения

[1]) Emden. Gaskugeln. Leipzig und Berlin, 1907.

(13.21), например удовлетворяющее условиям $\frac{d\theta}{dr}=0$; $\theta=1$ при $r=0$. Это решение найдено Эмденом численно и затабулировано. Обозначим его через $u(r)$.

Очевидно, что если $u(r)$ есть решение уравнения (13.21), то функция $\theta=\lambda u(\lambda r)$, где λ — постоянная, также является решением этого уравнения. Решение Эмдена $u(r)$ имеет корень при $r=6{,}9$. Очевидно, что решение $\theta=\lambda u(\lambda r)$ будет иметь корень при $r=\frac{6{,}9}{\lambda}$. Выбирая λ соответственным образом, мы можем удовлетворить условию $\theta=0$ при любом заданном радиусе звезды.

Что касается требования $\frac{d\theta}{dr}=0$ при $r=0$, то функция $\theta=\lambda u(\lambda r)$ удовлетворяет ему, ибо $\frac{du}{dr}=0$ при $r=0$.

Таблица 15

r	$u(r)$	$-\frac{du}{dr}$	r	$u(r)$	$-\frac{du}{dr}$
0,00	1,00	0,00	3,00	0,36	0,18
0,25	0,99	0,08	3,50	0,28	0,15
0,50	0,96	0,15	4,00	0,21	0,12
0,75	0,91	0,21	4,50	0,16	0,10
1,00	0,86	0,25	5,00	0,11	0,08
1,25	0,79	0,27	6,00	0,04	0,06
1,50	0,72	0,28	6,80	0,005	0,04
1,75	0,65	0,27	6,90	0,000	0,04
2,00	0,58	0,26			
2,50	0,46	0,22			

Итак искомое решение должно принадлежать к семейству решений $\theta=\lambda u(\lambda r)$. Представляет поэтому интерес привести затабулированные Эмденом значения $u(r)$.

Для определения λ при данной массе и светимости попытаемся применить уравнение (13.16) к внешней границе звезды, где его можно переписать в виде:

$$\frac{4R}{\beta\mu}\, r_1^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_1} = -G\left(\frac{\beta^2}{1-\beta}\,\frac{\pi\mu^2 aG}{3R^2}\right)^{1/2} M; \tag{13.22}$$

и заметим, что для всех наших решений мы имеем на основании нашей таблицы

$$\left[\frac{d\theta(r)}{dr}\right]_{r=r_1} = \lambda^2\left[\frac{du(r)}{dr}\right]_{r=6,9} = -0{,}04\lambda^2.$$

Поэтому:

$$r_1^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_1} = \left[\frac{du}{dr}\right]_{r=6,9}\cdot(6{,}9)^2 = -2,$$

и уравнение (13.22) примет вид:

$$2\,\frac{4R}{\beta\mu} = G\left(\frac{\beta^2}{1-\beta}\,\frac{\pi\mu^2 aG}{3R^2}\right)^{1/2} M. \tag{13.23}$$

Это уравнение представляет собою зависимость между M и β, т. е. между M и L; что же касается радиуса, то он совершенно выпадает.

Если условие (13.23) соблюдается, т. е. если заданные масса и светимость удовлетворяют этому условию, то уравнение Эмдена имеет целое семейство решений, удовлетворяющих предельным условиям с этими M и L. Это семейство решений выражается формулой

$$\theta = \lambda u (\lambda r), \tag{13.24}$$

где λ, а следовательно и радиус конфигурации, могут быть какими угодно.

Таким образом искомая зависимость между L и M получает вид:

$$3 : 4^3 R^4 (1 - \beta) = \pi \beta^4 \mu^4 G^3 a M^2, \tag{13.25}$$

где β определяется из (13, 10) через M и L.

Полученная зависимость между массой и светимостью может быть сравнена с наблюдениями, если известно значение μ и $\varkappa$ внутри звезды, ибо $\varkappa$ также входит в (13.10).

Что касается до молекулярного веса, то здесь возможны две отличных друг от друга гипотезы: a) звезда состоит главным образом из водорода. Тогда при сильной ионизации средний молекулярный вес будет близок к половине: $\mu = \frac{a}{1+Z} = \frac{1}{2}$, где a — атомный вес и Z — атомный номер; b) звезда состоит в основном из элементов более тяжелых, чем водород: $Z > 1$; $\mu = \frac{a}{1+Z} \approx 2$. Когда количества обоих веществ сравнимы между собою, мы будем иметь $\frac{1}{2} < \mu < 2$, и значение μ будет зависеть от процентного содержания водорода.

Сделав одну из указанных гипотез, мы можем внести предположенное значение молекулярного веса в (13.25). Взяв, далее, одну звезду с наблюдаемым M и L (например, Солнце), мы можем для нее из (13.25) вычислить $1 - \beta$. С другой стороны, зная из наблюдений R, мы можем для этой звезды узнать значение λ и $\theta(0) = \lambda$. Входя в (13.20), отсюда найдем T, а по (13.15) — ϱ в центральных областях. Для данной плотности и радиуса мы можем теоретически, при принятом предположении о составе вещества, определить коэфициент поглощения $\varkappa$.

Найденные таким образом значения $1 - \beta$ и $\varkappa$ должны вместе с L и M удовлетворять уравнению (13.10).

К сожалению, уравнение (13.10) при предположении о том, что звезда состоит из тяжелых элементов, не оправдывается. Эддингтон пытался выйти из затруднения, предположив, что $\varkappa$ в действительности превосходит теоретическое значение приблизительно в десять раз. Приняв такое преувеличенное значение для $\varkappa$, можно показать, что вычисленное по данному радиусу и данной массе на основании (13.25) и (13.10) значение светимости согласуется с наблюдением для каждой звезды, не являющейся белым карликом.

Эддингтон называет это рассуждение теоретическим выводом соотношения между массой и светимостью. На самом же деле полученное соотношение в скрытом виде содержит (через L и M) радиус, который приходится принимать из наблюдений. Поэтому мы были правы вначале, указывая, что без теории источников звездной энергии мы можем вывести лишь одно соотношение между тремя фундаментальными величинами, характеризующими звезду. Кроме того необходимо вновь напомнить, что вывод Эддингтона нельзя считать целиком теоретическим, ибо он искусственно подгоняет коэфициент поглощения таким образом, чтобы выведенное им соотношение согласовалось с наблюденным значением радиуса, хотя бы у одной звезды. Правда, после этого все звезды (не белые карлики) удовлетворяют его соотношению.

Стрёмгрен [1]) сделал другую попытку выйти из указанного затруднения с коэфициентом поглощения. Он допустил, что водород составляет значительную часть массы звезды. Тогда можно получить из теории Эддингтона соотношение между L, M и R, совпадающее с наблюдаемым, допустив, однако, что процентное содержание водорода меняется при переходе вдоль диаграммы Ресселя. Этому изменению процентного содержания водорода он придает эволюционный смысл. В настоящее время мы имеем в литературе целый ряд работ, посвященных выводу процентного содержания водорода у различных звезд на основавании теории Стрёмгрена.

Мы видим, что переменный (от звезды к звезде) молекулярный вес делает задачу вывода соотношения $f(L, M, R)=0$ неопределенной, и поэтому нельзя пока говорить, что теория Стрёмгрена доказывает правильность эддингтоновской теории газовых конфигураций звезд. Здесь требуются дополнительные подтверждения гипотезы Стрёмгрена.

2. Теория белых карликов Чандрасекара. В своей теории Чандрасекар принимает, что белые карлики состоят из крайне вырожденного электронного газа и, как указывалось, пренебрегает тем, что самые внешние слои состоят из идеального газа.

Условия крайнего вырождения приводят к тому, что как в нерелятивистском, так и в релятивистском газе Ферми световым давлением можно пренебречь по сравнению с газовым.

В самом деле, для нерелятивистского газа условие вырождения имеет вид: [2])

$$n \gg \frac{(m_e kT)^{3/2}}{h^3}, \tag{13.26}$$

где m_e — масса электрона.

Для газового давления имеем:

$$p = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3} nm_e\overline{v^2} = \frac{1}{3m_e} n\,\overline{m_e^2 v^2}, \tag{13.27}$$

где $\bar{\varepsilon}$ — средняя энергия электрона, а $\overline{v^2}$ — средний квадрат скорости.

---

[1]) Zeitschrift für Astrophysik, *4*, 118, 1932, *7*, 222, 1933.

[2]) См., напр., Бете и Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ, 1938, стр. 17.

Но для квадрата среднего импульса мы опять имеем из условия вырождения

$$\overline{m_e^2 v^2} \gg m_e kT. \qquad (13.28)$$

Сопоставляя (13.26), (13.27) и (13.28), находим:

$$p = \frac{1}{3m_e} n\overline{m_e^2 v^2} \gg \frac{1}{3m_e} \frac{(m_e kT)^{5/2}}{h^3}.$$

Умножая это неравенство на

$$1 > \left(\frac{m_e \bar{v}}{m_e c}\right)^3 \gg \frac{(m_e kT)^{3/2}}{(m_e c)^3},$$

следующее из $\bar{v} \ll c$ и условия вырождения, получаем для нерелятивистского газа Ферми:

$$p \gg \frac{1}{3} \frac{k^4}{h^3 c^3} T^4$$

или

$$p \gg p'.$$

В случае, когда газ Ферми релятивистский, т. е. когда $\bar{\varepsilon} \gg m_e c^2$ и средний импульс $\approx \frac{\bar{\varepsilon}}{c}$, мы имеем:

а) условие вырождения в форме

$$n \gg \frac{(kT)^3}{c^3 h^3}$$

и б) то же условие в форме

$$\bar{\varepsilon} \gg kT.$$

Перемножая их, получаем:

$$p = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon} \gg \frac{(kT)^4}{c^3 h^3}$$

или

$$p \gg p'.$$

Итак, в газе Ферми, как релятивистском, так и нерелятивистском, можно совершенно пренебречь световым давлением. Поэтому уравнение гидростатического равновесия принимает простую форму:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \varrho.$$

Для $M(r)$ имеем:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho.$$

Эти два уравнения дают:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\varrho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\varrho. \tag{13.29}$$

Уравнение состояния крайне вырожденного газа можно вывести для самого общего случая, обнимающего случаи — нерелятивистский, релятивистский и переходный. Это уравнение имеет в параметрической форме вид:

$$p = A\,f(x); \quad \varrho = Bx^3, \tag{13.30}$$

где

$$A = \frac{\pi\mu^4c^5}{3h^3}; \quad f(x) = x\,(2x^2-3)(x^2+1)^{1/2} + 3\,\mathrm{arcsh}\,x$$

$$B = \frac{8\pi m_e^3c^3\mu m_p}{3h^3} \tag{13.31}$$

и μ — молекулярный вес, а m_p — масса протона [1]). Важно, что в этом случае температура не входит в уравнение состояния.

Подставляя (13.30) в (13.29), находим:

$$\frac{A}{B}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{x^3}\frac{df(x)}{dr}\right) = -4\pi GBx^3. \tag{13.32}$$

С другой стороны, из (13.30) и (13.31) следует:

$$\frac{1}{x^3}\frac{df(x)}{dr} = \frac{8x}{(x^2+1)^{1/2}}\frac{dx}{dr} = 8\,\frac{d\sqrt{x^2+1}}{dr}.$$

Поэтому уравнение (13.32) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\sqrt{x^2+1}}{dr}\right) = -\frac{\pi GB^2}{2A}\,x^3.$$

Введем замену переменных: $\sqrt{x^2+1} = y$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right) = -\frac{\pi GB^2}{2A}\,(y^2-1)^{3/2}.$$

Это уравнение и является основным для решения проблемы. Предельные условия будут:

$$\frac{dy}{dr} = 0 \text{ при } r = 0$$

и

$$y = 1; \quad \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r_1)}{r_1^2} \text{ при } r = r_1.$$

Мы имеем всего три предельных условия, и при произвольном значении r_1 все три предельных условия для данной массы не могут удовлетвориться. Но можно пытаться удовле-

[1]) Вывод этого уравнения см. в русском издании книги С. Росселанд, Астрофизика на основе теории атома, ГТТИ, 1936.

творить им, выбирая r_1. Оказывается, что для масс, меньших некоторого M_{max}, всегда можно подобрать такое пограничное значение независимой переменной r_1, что указанные три предельных условия удовлетворятся.

В результате мы получаем некоторое теоретическое соотношение между массой M и радиусом r_1. Светимость выпала из окончательного соотношения.

В качестве дополнительного параметра и здесь входит молекулярный вес μ. Для звезды, у которой $\mu = 1$, мы имеем $M_{max} = 5{,}7 M_{\odot}$. Таким образом имеется верхняя граница для массы белого карлика.

Приводим из работы Чандрасекара табличку, дающую выведенную им зависимость между M и r_1, а также среднюю плотность конфигурации равновесия с данной массой при $\mu = 1$.

Таблица 16

$M/M_{\odot}$	Среднее ϱ в $г/см^3$	Радиус в $см$
5,728	∞	0
5,484	$4{,}716 \cdot 10^7$	$4{,}136 \cdot 10^8$
5,294	$1{,}578 \cdot 10^7$	$5{,}443 \cdot 10^8$
4,852	$5{,}111 \cdot 10^6$	$7{,}699 \cdot 10^8$
4,310	$2{,}114 \cdot 10^6$	$9{,}936 \cdot 10^8$
3,528	$7{,}960 \cdot 10^5$	$1{,}287 \cdot 10^9$
2,934	$4{,}065 \cdot 10^5$	$1{,}514 \cdot 10^9$
2,440	$2{,}302 \cdot 10^5$	$1{,}721 \cdot 10^9$
2,007	$1{,}345 \cdot 10^5$	$1{,}929 \cdot 10^9$
1,612	$7{,}741 \cdot 10^4$	$2{,}155 \cdot 10^9$
0,877	$1{,}936 \cdot 10^4$	$2{,}793 \cdot 10^9$
0	0	

При молекулярном весе μ, отличном от единицы, массы, данные в этой таблице, должны быть помножены на μ^{-2}, а радиусы на μ^{-1}.

К сожалению, имеющийся материал о массах белых карликов очень скуден. Наблюденные радиусы, повидимому, того же порядка, что радиусы, следующие из таблицы 16 при массах порядка $M_{\odot}$.

Что касается до светимостей белых карликов, то они целиком определяются распределением и интенсивностью источников энергии этих звезд.

Только правильная физическая гипотеза об источниках звездной энергии даст возможность построить полную теорию внутреннего строения звезд, объясняющую наблюдаемые факты.