ББК 22.151
А46
УДК 514(075.8)

Рецензенты:

кафедра алгебры и геометрии Воронежского государственного пединститута,

кафедра геометрии и методики преподавания Новосибирского государственного пединститута

Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.

А46 Геометрия: Учеб. пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 672 с.: ил.

ISBN 5-02-014336-7

Содержит основные разделы курса геометрии: аналитическую геометрию, элементарную еометрию на основе аксиоматики, включая геометричес преобразования и построения, элементы многомерной и проективной геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, основания геометрии с обзором теорий «высшей» геометрии.

Для студентов математических специальностей педвузов и университетов, преподавателей средней школы и техникумов.

А $\frac{1602050000—083}{053(02)\text{-}90}$ 46-90 ББК 22.151

ISBN 5-02-014336-7

Часть 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В четвертой части мы изучаем кривые и поверхности в трехмерном пространстве. Основной инструмент для исследования кривых — это естественная параметризация. С ее помощью мы даем первоначальные определения большинства вводимых дифференциально-геометрических понятий, а затем уже приводим чисто геометрические определения. Глава о кривых заканчивается «натуральными уравнениями», описывающими вид кривой вне зависимости от ее расположения в пространстве.

Для исследования поверхностей мы рассматриваем лежащие на них кривые: с их длиной и кривизной естественно связываются первая и вторая основные формы поверхности. В конце второй главы рассматриваются локально кратчайшие кривые — геодезические. Это аналоги прямых на плоскости, — они играют важную роль при изучении внутренней геометрии на искривленной поверхности.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ

§ 1. Элементарные кривые на плоскости и в пространстве. Способы их задания

Для изучения кривых необходимо иметь их точное определение. Мы ограничимся здесь тем, что дадим определение элементарной кривой. Множество C (на плоскости или в пространстве) называется *элементарной кривой*, если оно является образом отрезка при некотором непрерывном взаимно однозначном отображении этого отрезка в плоскость или в пространство.

Примеры. Простейшие элементарные кривые — это отрезки прямых, дуги окружностей, эллипсов, графики непрерывных функций, заданных на отрезке, и т. п. Простые конечнозвенные ломаные тоже будут элементарными кривыми в нашем определении (рис. 1).

Образы концов отрезка называются *концами* элементарной кривой, а образ любого отрезка, содержащегося в исходном отрезке, называется *дугой*. Очевидно, что всякая дуга элементарной кривой сама является элементарной кривой.

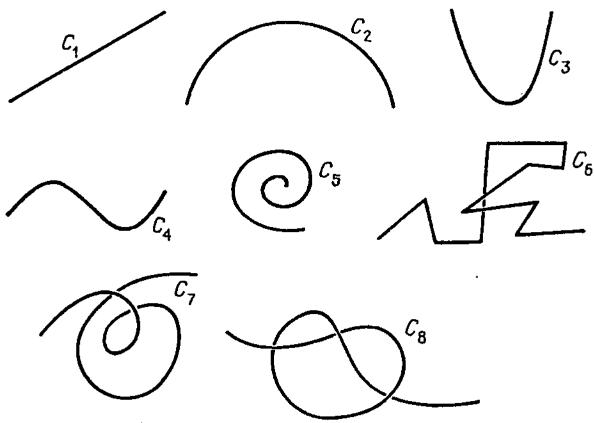

Рис. 1

Если элементарная кривая C есть образ отрезка $[a, b]$ при взаимно однозначном и непрерывном отображении F: $[a, b] \to \mathbf{R}^3$, то положение любой точки P на кривой C определяется одним-единственным числом $t \in [a, b]$, образом которого эта точка является: $P = F(t)$. Переменная t называется *параметром* кривой C. Разным значениям параметра соответствуют различные точки кривой C. Отображение F будем называть *параметризацией* кривой C. У одной и той же элементарной кривой может быть много различных параметризаций. Кривую, снабженную параметризацией, будем называть *параметризованной* кривой (рис. 2).

Фиксируем систему координат. Пусть точка $P = F(t)$ имеет координаты x, y, z. При изменении параметра t они тоже будут меняться — каждая координата является некоторой функцией от t:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \tag{1}$$

где f_1, f_2, f_3 — непрерывные числовые функции, заданные на отрезке $[a, b]$ (рис. 3).

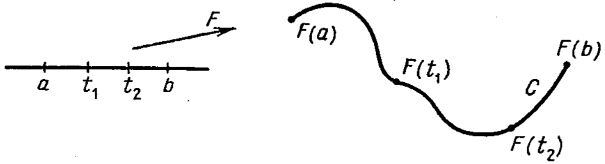

Рис. 2

Функции f_1, f_2, f_3 полностью описывают параметризацию F и называются ее *координатными функциями*. Соотношения $x = f_1$, $y = f_2$, $z = f_3$ называются *уравнениями* параметризованной кривой C.

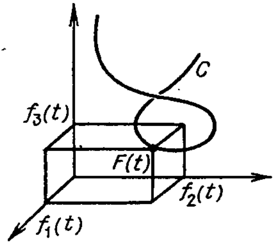

Рис. 3

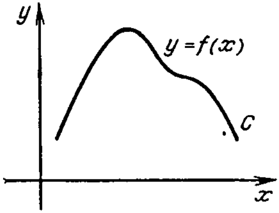

Рис. 4

Если f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция, то ее график является плоской элементарной кривой, допускающей параметризацию $x = t$, $y = f(t)$. Как множество кривая C задается уравнением $y = f(x)$. Такое задание кривой называется *явным* (рис. 4). Пространственная кривая допускает *явнов задание*, если она обладает параметризацией вида $x = t$, $y = f(t)$, $z = g(t)$. Такая кривая как множество может быть задана системой уравнений $y = f(x)$, $z = g(x)$.

Не все кривые допускают явное задание.

Пример. Любая дуга окружности, большая 180°, не допускает явного задания.

Для нас основной интерес будут представлять кривые, обладающие параметризацией с некоторыми дополнительными свойствами. Пусть $F\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$ — параметризация кривой C, а f_1, f_2, f_3 — ее координатные функции. Параметризация F называется *регулярной*, если, во-первых, функции f_1, f_2, f_3 гладкие (т. е. достаточное число раз непрерывно дифференцируемые) и, во-вторых, при каждом значении параметра $t \in [a, b]$ производная по крайней мере одной

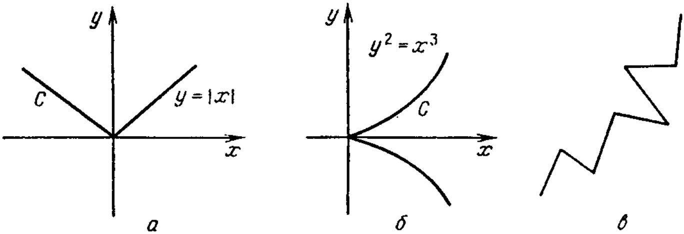

Рис. 5

из этих функций не обращается в нуль. (Последнее условие удобно записать в виде: $(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2 \neq 0$.) Кривая, обладающая регулярной параметризацией, называется *гладкой* (ср. рис. 5). При необходимости мы будем без дополнительных оговорок требовать *повышенной гладкости*, т. е. существования у функций f_1, f_2, f_3 непрерывных производных до n-го порядка включительно при некотором $n \geqslant 2$.

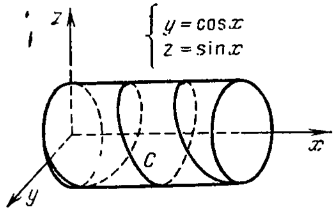

Рис. 6

Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности каждой своей точки гладкая кривая допускает явное задание. Другими словами, всякая достаточно малая дуга гладкой кривой является графиком некоторого гладкого отображения (в подходящей системе координат).

Пример. Рассмотрим отображение $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, заданное формулой: $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Его графиком в $\mathbf{R}^3$ будет отрезок *винтовой линии*. Он лежит на цилиндре радиуса 1 с осью Ox (рис. 6).