§ 2. Вектор-функции одного переменного

Рассмотренные нами в § 1 способы задания кривых связаны с координатами и используют числовые функции. Часто удобен бескоординатный способ задания, когда для параметризации кривой используются вектор-функции. Здесь мы коротко изложим связанные с ними понятия и формулировки. Почти все доказательства опускаются.

Пусть каждому числу $t \in [a, b]$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{v}(t)$ трехмерного евклидова пространства. Тогда будем говорить, что на отрезке $[a, b]$ определена *вектор-функция* $\boldsymbol{v}(t)$. Таким образом, вектор-функция — это функция со значениями в множестве (свободных) векторов трехмерного евклидова пространства. Часто для наглядности векторы — значения вектор-функции — представляют направленными отрезками (рис. 10).

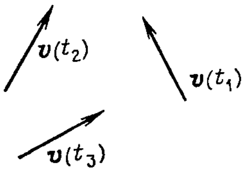

Рис. 10

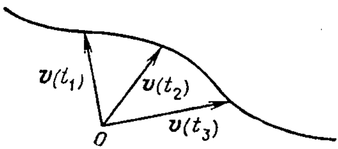

Рис. 11

Если, например, отложить все векторы $\boldsymbol{v}(t)$ из одной и той же точки O — начала отсчета, то их концы образуют некоторое множество точек, которое называется *годографом* вектор-функции $\boldsymbol{v}(t)$. Таким образом, годограф — это множество точек, радиус-векторы которых являются значениями вектор-функции (рис. 11).

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана вектор-функция $\boldsymbol{v}(t)$. Говорят, что вектор $\boldsymbol{a}$ есть *предел* этой вектор-функции в точке $t_0 \in [a, b]$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{a}| = 0.$$

В таком случае используют запись: $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{v}(t)$.

Вектор-функция $\boldsymbol{v}(t)$ называется *непрерывной в точке*

t_0, если

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0} v(t).$$

Если вектор-функция $v(t)$ непрерывна во всех точках промежутка $[a, b]$, то говорят, что она *непрерывна на* $[a, b]$.

Для вектор-функций определены те же алгебраические операции, что и для обычных векторов: это сложение, вычитание, умножение на числовую функцию, скалярное, векторное и смешанное произведения. Вводятся они поточечно:

$$(v+w)(t)=v(t)+w(t),$$
$$(v-w)(t)=v(t)-w(t),$$
$$(f\cdot v)(t)=f(t)\cdot v(t),$$
$$(v\cdot w)(t)=v(t)\cdot w(t),$$
$$(v\times w)(t)=v(t)\times w(t),$$
$$(u,\ v,\ w)(t)=(u(t),\ v(t),\ w(t)).$$

Говорят, что вектор-функция $v(t)$ *дифференцируема в точке* $t_0\in[a, b]$, если при $t\to t_0$ существует предел отношения $(v(t)-v(t_0))/(t-t_0)$. Этот предел называется *производной* вектор-функции $v(t)$ *в точке* t_0 и обозначается через $v'(t_0)$ (рис. 12):

$$v'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}.$$

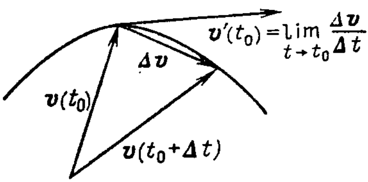

Рис. 12

Если вектор-функция дифференцируема в некоторой точке, то, очевидно, она и непрерывна в этой точке. Если вектор-функция $v(t)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a, b]$, то говорят, что она *дифференцируема на всем отрезке* $[a, b]$.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей точками

$$a=t_0<t_1<t_2<\ \ldots\ <t_n=b.$$

Пусть δ — максимальное из чисел $t_{i+1}-t_i$ при $i=0,\ \ldots,\ n-1$. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)(t_{i+1}-t_i),$$

где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Будем говорить, что вектор-функция $v(t)$ *интегрируема*, если для произвольного выбора τ_i существует предел интегральных сумм σ_n при $\delta \to 0$. Этот предел будем называть *определенным интегралом* от вектор-функции $v(t)$ и обозначать его как обычно:

$$\int_a^b \boldsymbol{v}(t)\,dt.$$

Из неравенства треугольника для векторов можно вывести полезное неравенство для вектор-функций:

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{v}(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\,dt.$$

Доказывать различные свойства вектор-функций проще всего в координатах. Фиксируем в пространстве декартову систему координат xyz с началом в некоторой точке O. Если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, то

$$\boldsymbol{v}(t) = v_1(t)\,\boldsymbol{i} + v_2(t)\,\boldsymbol{j} + v_3(t)\,\boldsymbol{k},$$

где $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{v}(t)$. Функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ $v_3(t)$ называются *координатными функциями* вектор-функции $\boldsymbol{v}(t)$ (рис. 13).

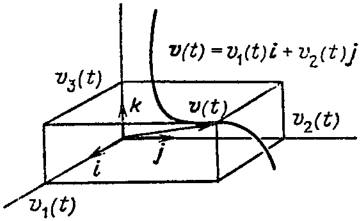

Рис. 13

Нетрудно доказать, что вектор $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ является пределом функции $\boldsymbol{v}(t)$ в точке t_0 тогда и только тогда, когда его координаты a_1, a_2, a_3 являются пределами координатных функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$. Из этого легко следует, что если

$f(t) \to \alpha$, $\boldsymbol{u}(t) \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}(t) \to \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{c}$ при $t \to t_0$, то

$$\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c},$$
$$f(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) \to \alpha \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t)) \to (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Кроме того, ясно, что вектор-функция $\boldsymbol{v}(t)$ непрерывна в точке t_0 (на всем отрезке $[a, b]$) тогда и только тогда, когда в точке t_0 (на отрезке $[a, b]$) непрерывны ее координатные функции. Из этого следует, что если функции $f(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ непрерывны в точке t_0 (на отрезке $[a, b]$), то вместе с ними непрерывны функции $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, $f \cdot \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Нетрудно доказать, что вектор-функция $\boldsymbol{v}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы координатные функции $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$. При этом

$$\boldsymbol{v}'(t_0) = v_1'(t_0)\,\boldsymbol{i} + v_2'(t_0)\,\boldsymbol{j} + v_3'(t_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Если $\boldsymbol{v}(t)$ дифференцируема на всем отрезке $[a, b]$, то ее координатные функции также дифференцируемы. Верно и обратное утверждение. При этом если $f(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ дифференцируемы на $[a, b]$, то

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}', \qquad (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})' = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w}',$$
$$(f \cdot \boldsymbol{v})' = f'\boldsymbol{v} + f\boldsymbol{v}', \qquad (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})' = \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}',$$
$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})' = \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}',$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})' = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}').$$

Аналогично обстоит дело с интегрируемостью. Вектор-функция $\boldsymbol{v}(t)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы ее координатные функции v_1, v_2, v_3. При этом

$$\int_a^b \boldsymbol{v}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int_a^b v_1(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int_a^b v_2(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int_a^b v_3(t)\,dt.$$

Ясно теперь, что всякая непрерывная вектор-функция интегрируема.

Если функция $v(t)$ имеет непрерывную производную, то справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$v(b) - v(a) = \int_a^b v'(t)\,dt.$$

Векторные уравнения кривых. Как мы скоро убедимся, вектор-функции очень удобны для описания и исследования кривых. Если F: $[a, b] \to \mathbf{R}^3$ — параметризация некоторой кривой C, то ей соответствует вектор-функция f, определенная по формуле

$$f(t) = \overrightarrow{OF(t)}.$$

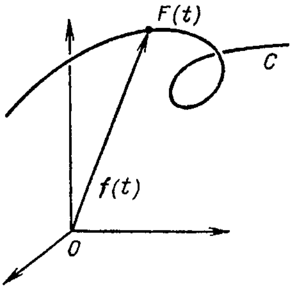

Рис. 14

Функция F однозначно восстанавливается по вектор-функции f. Координатные функции у f и F, как видно из определения, совпадают. Вектор-функция f называется *векторной параметризацией* кривой C (рис. 14).

Если радиус-вектор $\overrightarrow{OF(t)}$ обозначать через r, то равенство

$$r = f(t)$$

называется *векторным уравнением* кривой C. Кривую C при этом можно рассматривать как годограф вектор-функции $f(t)$.

Вектор-функция f непрерывна в силу непрерывности отображения F. Если кривая C гладкая, а F — ее регулярная параметризация, то функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем ее производная нигде не обращается в нуль:

$$f'(t) \neq 0.$$

Закончим параграф одной леммой о вектор-функциях, которой мы часто будем пользоваться при изучении кривых.

Лемма. *Пусть $v(t)$ — вектор-функция, дифференцируемая всюду на отрезке $[a, b]$. Тогда для того, чтобы* *ее модуль* $|v(t)|$ *был постоянной функцией, необходимо и достаточно, чтобы* $v(t)$ *была всюду ортогональна своей производной* $v'(t)$: $v(t)\cdot v'(t)\equiv 0$.

Доказательство. Ясно, что $|v(t)|$ — постоянная функция тогда и только тогда, когда $v^2(t)$ — постоянная функция. Но производная этой функции как раз и совпадает с $2v(t)\cdot v'(t)\equiv 0$. Осталось заметить, что равенство нулю производной равносильно постоянству самой функции. □

В дальнейшем все параметризации у нас будут только векторными. При этом мы позволим себе отождествлять точку с ее радиус-вектором и писать $f(t)=P$ вместо $f(t)=\overrightarrow{OP}$.