§ 3. Касательная кривой

Пусть C — гладкая элементарная кривая, а $\boldsymbol{f}(t)$ — вектор-функция, задающая ее регулярную параметризацию. Если $P=\boldsymbol{f}(t_0)$ — точка кривой, то вектор $\boldsymbol{f}'(t_0)$ называется *касательным вектором кривой* C в точке P (рис. 15).

Если вектор-функция $\boldsymbol{f}(t)$ описывает перемещение материальной точки вдоль кривой C, то вектор $\boldsymbol{f}'(t_0)$ будет *вектором скорости* этой точки в момент времени t_0 (рис. 16).

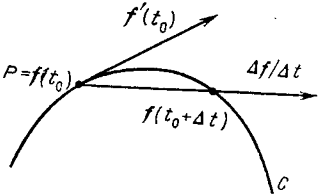

Рис. 15

Касательные векторы в одной и той же точке, соответствующие различным параметризациям, коллинеарны и, значит, могут отличаться только множителем.

Действительно, если $\boldsymbol{g}(\tau)=\boldsymbol{f}(\varphi(\tau))$ — другая параметризация той же кривой, причем $t_0=\varphi(\tau_0)$, то вектор $\boldsymbol{g}'(\tau_0)=\boldsymbol{f}'(\varphi(\tau_0))\cdot\varphi'(\tau_0)$ очевидно коллинеарен вектору $\boldsymbol{f}'(t_0)=\boldsymbol{f}'(\varphi(\tau_0))$. □

Прямая, проходящая через точку P в направлении касательного вектора $\boldsymbol{f}'(t_0)$, называется *касательной прямой в точке* P (рис. 17). Параметрическое уравнение касательной прямой имеет вид

$$\boldsymbol{r}(\tau)=\boldsymbol{f}(t_0)+\tau\boldsymbol{f}'(t_0).$$

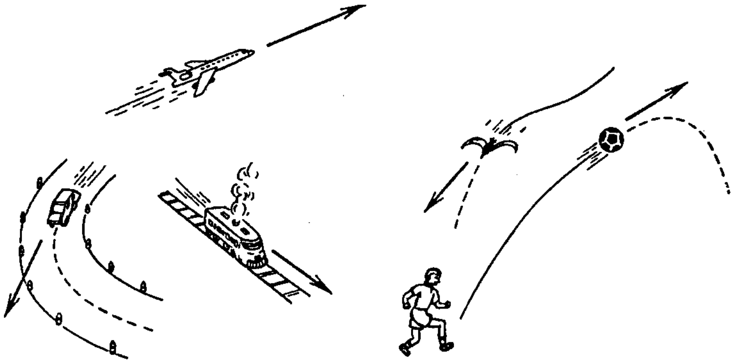

Рис. 16

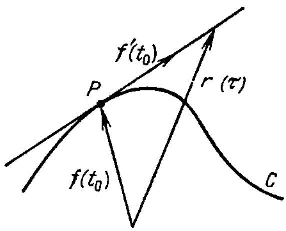

Рис. 17

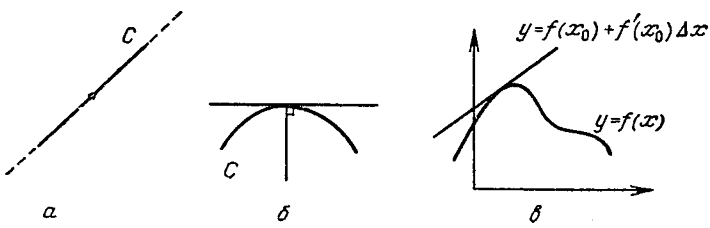

Рис. 18

Примеры. 1. Касательная прямая к отрезку в любой точке совпадает с прямой, на которой лежит этот отрезок (рис. 18, *а*).

2. Касательная к дуге окружности совпадает с обычной касательной к самой окружности (в той же точке, рис. 18, *б*).

3. Касательная к графику гладкой функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет уравнение (рис. 18, *в*)

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Наше определение касательной не очень геометрично, хотя удобно на практике. За основу другого определения можно взять следующее важное свойство касательной. Пусть Q — точка кривой C, близкая к точке P.

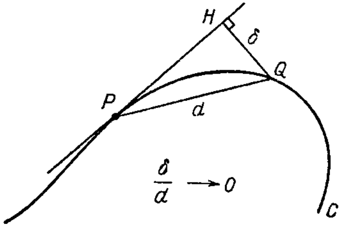

Рис. 19

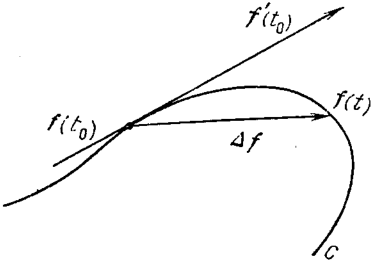

Рис. 20

Теорема. *При стремлении точки Q кривой C к точке P предел отношения расстояния δ от точки Q до касательной прямой в точке P к расстоянию d от Q до P равен нулю*:

$$\lim_{Q \to P} \frac{\delta}{d} = 0.$$

Касательная является единственной прямой, обладающей этим свойством (рис. 19).

Доказательство. Пусть $Q = \mathbf{f}(t)$. Положим $\Delta t = t - t_0$, $\Delta \mathbf{f} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)$ (рис. 20). Расстояние d от точки Q до точки P равняется $|\Delta \mathbf{f}|$, а расстояние δ от точки Q до касательной в точке P

равняется $|\Delta f \times f'(t_0)| : |f'(t_0)|$. Наконец,

$$\lim_{Q\to P}\frac{\delta}{d}=\lim_{t\to t_0}\frac{\delta/\Delta t}{d/\Delta t}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\delta}{\Delta t}}{\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{d}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{t\to t_0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta t}\times f'(t_0)\right|}{\lim\limits_{t\to t_0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta t}\right|\cdot|f'(t_0)|}=\frac{|f'(t_0)\times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|^2}=0.$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь l — произвольная прямая, проходящая через точку P, а $\boldsymbol{b}$ — ее направляющий вектор.

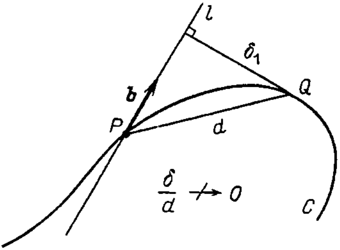

Рис. 21

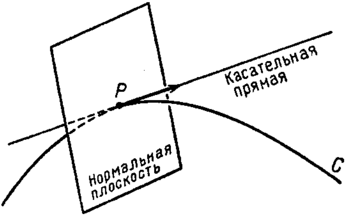

Рис. 22

Обозначим через δ_1 расстояние от точки Q до прямой l (рис. 21). Воспроизводя для прямой l предыдущие выкладки, получаем, что

$$\lim_{Q\to P}\frac{\delta_1}{d}=\frac{|f'(t_0)\times \boldsymbol{b}|}{|f'(t_0)|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

Осталось заметить, что этот предел равен нулю в том и только в том случае, когда векторы $f'(t_0)$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, т. е. когда прямая l является касательной. Теорема доказана. □

Плоскость, содержащая точку P и ортогональная касательной прямой, называется *нормальной плоскостью* кривой C в точке P (рис. 22).