§ 4. Длина кривой

Пусть элементарная кривая C параметризована вектор-функцией $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$. Выберем на отрезке $[a, b]$ $n-1$ точек, разбивающие его на n частей: $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < b$. Для удобства обозначений положим $t_0 = a$, $t_n = b$. Ломаная с вершинами в точках $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)$ называется *вписанной* в кривую C (рис. 23).

Интуитивно кажется ясным, что длина кривой C (если о ней вообще можно говорить) не должна сильно отличаться от длины вписанной ломаной при условии, что у ломаной достаточно много звеньев и все они достаточно малы (рис. 24). Это приводит

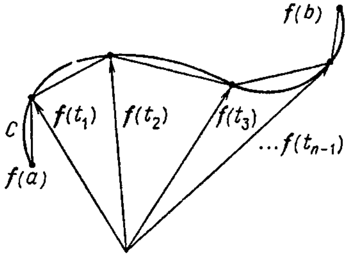

Рис. 23

Рис. 24

нас к следующему определению. *Длиной* кривой C называется предел, к которому стремится длина вписанных в нее ломаных при неограниченном возрастании числа звеньев ломаной и неограниченном убывании их длин. Отметим, что условие убывания длин звеньев можно заменить другим, равносильным ему условием: надо потребовать, чтобы

$$\max_{i=0, \ldots, n-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0.$$

Нетрудно видеть, что этот предел (конечный или бесконечный) всегда существует: это есть не что иное, как супремум длин ломаных, вписанных в кривую.

Кривая C называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Теорема. *Всякая элементарная гладкая кривая C спрямляема. Ее длина S может быть найдена по формуле*

$$S = \int_a^b |f'(t)|\, dt,$$

где $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$ — произвольная регулярная параметризация кривой C.

Доказательство. Оценим разность между длиной ломаной и интегралом модуля производной.

Для этого введем обозначения:

$$\Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1}), \qquad f'_i = f'(t_i), \qquad \Delta_i t = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f| - \int_a^b |f'(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f| - \sum_{i=1}^{n} |f'_i|\,\Delta_i t\right| + \\ + \left|\sum_{i=1}^{n} |f'_i|\,\Delta_i t - \int_a^b |f'(t)|\,dt\right| = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Второе слагаемое по мере уменьшения звеньев ломаной стремится к нулю по определению интеграла. Осталось доказать, что к нулю стремится и первое слагаемое. Преобразовывая, получаем неравенство:

$$\mathrm{I} = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(|\Delta_i f| - |f'_i|\,\Delta_i t\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f - f'_i \Delta_i t|.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в этой сумме:

$$|\Delta_i f - f'_i \Delta_i t| = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\,dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_i\,dt\right| = \\ = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - f'_i)\,dt\right| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'_i|\,dt.$$

Так как функция $f'(t)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если x, $y \in [a, b]$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Поэтому если все отрезки $[t_{i-1} t_i]$ по длине меньше δ, то $|f'(t) - f'_i| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_{i-1}, t_i]$, и, следовательно,

$$|\Delta_i f - f'\,\Delta_i t| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon \cdot dt = \varepsilon \cdot \Delta_i t.$$

Окончательно получаем, что для достаточно мелких разбиений

$$\mathrm{I} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon \cdot \Delta_i t) = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta_i t = \varepsilon\,(t_n - t_0).$$

Отсюда в силу произвольности выбора числа ε следует, что первое слагаемое стремится к нулю. □

Примеры. 1. Если f_1, f_2, f_3 — координатные функции вектор-функции f, то формула длины кривой примет вид

$$S = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2}\, dt$$

или, короче,

$$S = \int_a^b \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}\, dt.$$

2. Если кривая C плоская и явно задана уравнением $y = f(x)$, то, подставляя в предыдущую формулу $t = x$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = f(x)$, $f_3(x) = 0$, получаем

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}\, dx.$$

Естественная параметризация. Длину дуги можно использовать для введения одной очень удобной параметризации кривой C. Зададим на промежутке $[a, b]$ функцию $\psi(t)$ по формуле

$$\psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau.$$

Ясно, что $\psi(t)$ равняется длине дуги с началом в $f(a)$ и концом $f(t)$. Функция $\psi(t)$ гладкая: очевидно, $\psi'(t) = |f'(t)|$. Она монотонно возрастает (поскольку ее производная $|f'(t)|$ положительна) и отображает отрезок $[a, b]$ в отрезок $[0, S]$.

Рассмотрим обратную функцию $\varphi = \psi^{-1}$: $[0, S] \to$ $\to [a, b]$,

$$\varphi(s) = \psi^{-1}(s),$$

и параметризацию $g(s)$ кривой C, получающуюся из параметризации $f(t)$ при замене параметра $t = \varphi(s)$:

$$g(s) = f(\varphi(s)).$$

Такая параметризация называется *естественной параметризацией кривой* C (рис. 25). (Другие названия:

натуральная параметризация или параметризация длиной дуги.) Параметром в этой параметризации служит s — длина отрезка кривой. Это и есть так называемый *естественный параметр.* Параметризация $f(t)$ получается из $g(s)$ при обратной замене параметра $s = \psi(t)$.

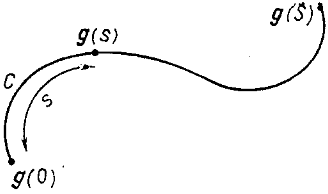

Рис. 25

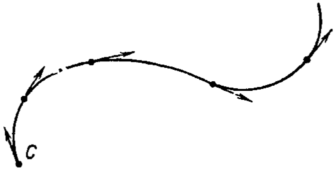

Рис. 26

Важное свойство естественной параметризации состоит в том, что касательный вектор при такой параметризации имеет единичную длину (рис. 26)

$$|g'(s)| \equiv 1.$$

Действительно, поскольку

$$\varphi'(s) = \left(\psi^{-1}\right)'(s) = \frac{1}{\psi'(\varphi(s))} = \frac{1}{|f'(\varphi(s))|},$$

то

$$|g'(s)| = |f'(\varphi(s))\,\varphi'(s)| = \left|\frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}\right| \equiv 1.$$

Этим своим свойством и тем, что $g(0)$ совпадает с началом кривой, естественная параметризация определена однозначно.

Пример. Уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ при $t \in [0, \pi]$ задают естественную параметризацию верхней единичной полуокружности.

В дальнейшем мы будем обозначать вектор $g'(s)$ через t и называть его *единичным вектором касательной* или *единичным касательным вектором* кривой в точке $g(s)$.