§ 5. Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость

Пусть C — гладкая кривая, а $\boldsymbol{g}(s)$ — ее естественная параметризация. Рассмотрим произвольную точку $P = \boldsymbol{g}(s_0)$ на кривой C и вектор $\boldsymbol{g}''(s_0)$ второй производной функции $\boldsymbol{g}$ в этой точке. Этот вектор называется *вектором кривизны* кривой C в точке P и обозначается через $\boldsymbol{k}$ (рис. 27):

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{g}''(s_0).$$

Его длина $k = |\boldsymbol{k}|$ называется *кривизной* кривой C в точке P.

Поскольку $|\boldsymbol{g}'(s)| \equiv 1$, то вектор $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{g}''(s_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{g}'(s_0)$ и, следовательно, лежит

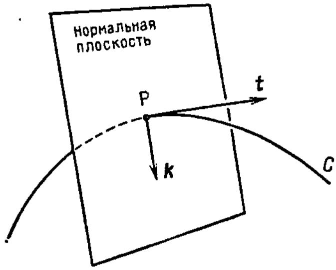

Рис. 27

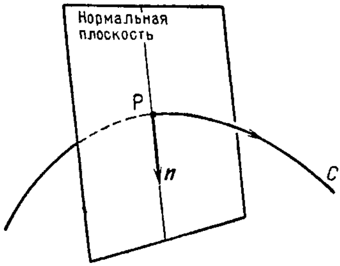

Рис. 28

в нормальной плоскости. Если $k \neq 0$, то $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ и прямая, проходящая через точку P в направлении вектора $\boldsymbol{k}$, называется *главной нормалью* кривой C в точке P. В этом случае единичный вектор $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k$ называется *единичным вектором главной нормали* (рис. 28).

Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k \cdot \boldsymbol{n}.$$

Это так называется «первая формула Френе».

Кривизна позволяет определить, насколько данная кривая отличается от прямой. Так, кривизна прямой во всех точках равна нулю. Верно и обратное: если кривизна кривой равна нулю во всех точках, то кривая является отрезком прямой. (Докажите.)

Пример. Кривизна дуги окружности радиуса R во всех точках равняется $1/R$. (Проверьте.)

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* кривой в данной точке.

Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ — произвольная параметризация кривой C. Пусть она связана с естественной параметризацией $\boldsymbol{g}(s)$ при помощи замены параметра:

$s = \psi(t) = \int\limits_0^t |f'(\tau)|\, d\tau$, причем $s_0 = \psi(t_0)$. Вектор $f''(t_0)$ может не быть коллинеарным вектору кривизны $k = g''(s_0)$, но его проекция $[f''(t_0)]^{\perp}$ на нормальную плоскость коллинеарна вектору k. Действительно, $f'(t_0) = g'(s_0) \cdot \psi'(t_0)$. Следовательно,

$$f''(t_0) = g''(s_0) \cdot (\psi'(t_0))^2 + g'(s_0) \cdot \psi''(t_0).$$

Так как первое слагаемое лежит в нормальной плоскости, а второе — на касательной прямой, то первое слагаемое и равняется нормальной составляющей вектора $f''(t_0)$ (рис. 29):

$$(f''(t_0))^{\perp} = |f'(t_0)|^2 \cdot k.$$

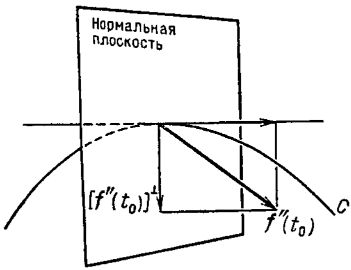

Рис. 29

(Механический смысл этой формулы заключается в том, что *нормальное ускорение* материальной точки, движущейся по кривой C, зависит только от скорости: оно прямо пропорционально квадрату скорости, а коэффициентом пропорциональности служит вектор кривизны.)

В нашем определении кривизна k является функцией точки P, но часто удобно считать, что она зависит от естественного параметра s или от того же параметра t, что и функция f. Найдем выражение кривизны через первую и вторую производные функции f. Ясно, что $k(t_0) = \left| \frac{(f''(t_0))^{\perp}}{|f'(t_0)|^2} \right|$. Обозначим через α угол между векторами $f'(t_0)$ и $f''(t_0)$. Тогда

$$|(f''(t_0))^{\perp}| = |f''(t_0)| \cdot \sin\alpha = \frac{|f''(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|}.$$

Окончательно получаем

$$k(t_0) = \frac{|f''(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|^3},$$

или, короче,

$$k = \frac{|f'' \times f'|}{|f'|^3}.$$

Пример. Кривизна плоской кривой, заданной уравнением в явном виде $y = f(x)$, вычисляется по формуле $k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$. Отметим, что в тех точках, где первая производная обращается в нуль, кривизна просто равна модулю второй производной: $k = |f''|$.

Пусть в точке P кривая C имеет ненулевую кривизну. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{f}'(t_0)$ и $\boldsymbol{f}''(t_0)$ всегда лежат в плоскости, натянутой на векторы $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$. Эта плоскость называется *соприкасающейся плоскостью* кривой C в точке P (рис. 30, 31). В качестве нормального вектора к ней можно взять единичный вектор $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$, который называется *вектором бинормали* в точке P. Нетрудно видеть, что в каждой точке кривой C, где кривизна отлична от нуля, векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Эта тройка векторов называется *базисом Френе*. (Другие названия: репер Френе, трехвекторник Френе, сопровождающий трехвекторник и т. п.) (рис. 32). Очевидно, что

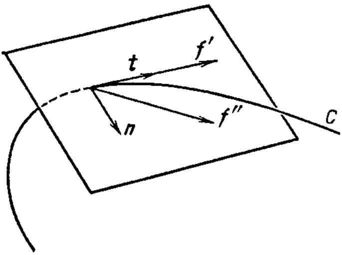

Рис. 30

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{f}'(t_0) \times \boldsymbol{f}''(t_0)}{|\boldsymbol{f}'(t_0) \times \boldsymbol{f}''(t_0)|}.$$

Соприкасающаяся плоскость плоской кривой всегда совпадает с той плоскостью, в которой лежит кривая.

Соприкасающаяся плоскость обладает одним важным свойством, которое можно взять за основу при геометрическом ее определении:

Теорема. *Пусть Q — точка кривой C, близкая к точке P. При стремлении точки Q к точке P отношение расстояния δ от точки Q до соприкасающейся плоскости в точке P к квадрату расстояния d от Q до P стремится к нулю:*

$$\lim_{Q \to P} \frac{\delta}{d^2} = 0.$$

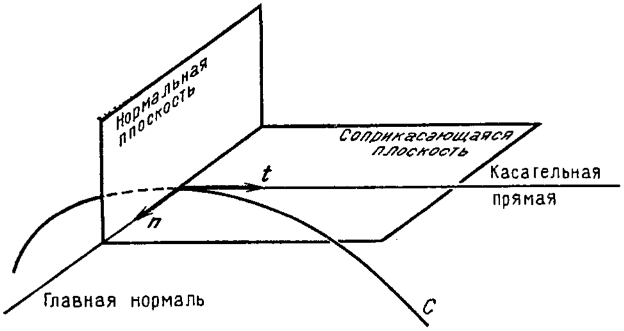

Рис. 31

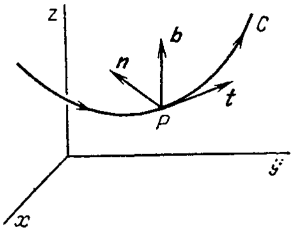

Рис. 32

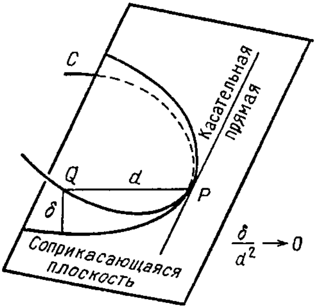

Рис. 33

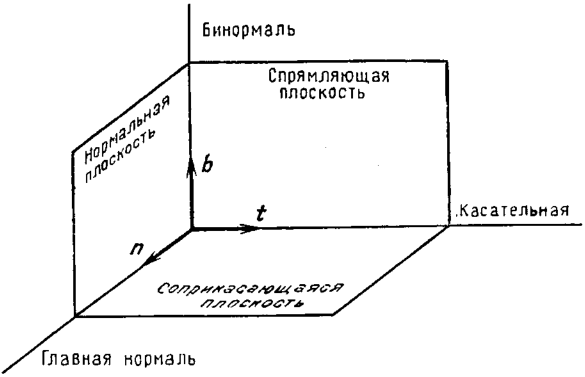

Рис. 34

Если кривизна кривой C в точке P отлична от нуля, то единственной плоскостью, обладающей таким свойством, будет соприкасающаяся плоскость (рис. 33).

(Сформулированная теорема означает, что в каждой точке кривая с точностью до величин второго порядка малости приближается плоской кривой — своей проекцией на соприкасающуюся плоскость в этой точке.) Этот факт мы оставим без доказательства, тем более что нигде не будем его использовать. □

Плоскость, проходящая через точку P и содержащая векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{t}$, называется *спрямляющей плоскостью* кривой C в точке P (рис. 34).