§ 6. Кручение кривой. Формулы Френе

Пусть C — гладкая кривая, а $\boldsymbol{g}(s)$ — ее естественная параметризация. В этом и двух следующих параграфах мы будем предполагать, что во всех своих точках кривая C имеет ненулевую кривизну. В частности, в любой ее точке $P=\boldsymbol{g}(s_0)$ определены соприкасающаяся плоскость и вектор бинормали

$$\boldsymbol{b}(s_0)=\boldsymbol{t}(s_0)\times\boldsymbol{n}(s_0)=\frac{\boldsymbol{g}'(s_0)\times\boldsymbol{g}''(s_0)}{k(s_0)}.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{b}'(s_0)$ первой производной от функции $\boldsymbol{b}(s)$. Он ортогонален вектору $\boldsymbol{t}(s_0)$, поскольку

$$\boldsymbol{b}'(s)=[\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)]'=\boldsymbol{t}'(s)\times\boldsymbol{n}(s)+\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}'(s)=$$
$$=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}'(s).$$

(Поясним третье равенство. Первое слагаемое в левой его части равно нулю, поскольку векторы $\boldsymbol{t}'$ и $\boldsymbol{n}$ коллинеарны (первая формула Френе).) Далее, вектор $\boldsymbol{b}'(s_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{b}(s_0)$ ввиду постоянства модуля вектор-функции $\boldsymbol{b}(s)$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{b}'(s_0)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}(s_0)$. Поэтому выполняется равенство вида

$$\boldsymbol{b}'(s_0)=-\varkappa\cdot\boldsymbol{n}(s_0),$$

Число $\varkappa$ называется кручением кривой C в точке P. Выписанное равенство носит название «третьей формулы Френе». *Абсолютным кручением* $|\varkappa|$ в точке P

называется абсолютная величина вектора $b'(s_0)$:

$$|\varkappa| = |b'(s_0)|.$$

Кручение характеризует отличие пространственной кривой от плоской, поскольку, очевидно, кручение плоской кривой в каждой точке равно нулю. Нетрудно видеть, что если кручение кривой в каждой точке равно нулю, то эта кривая лежит в некоторой плоскости (рис. 35).

Абсолютное кручение можно определить более геометрически. Если Q — близкая к P точка кривой C, а θ — угол между соприкасающимися плоскостями

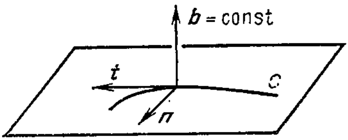

Рис. 35

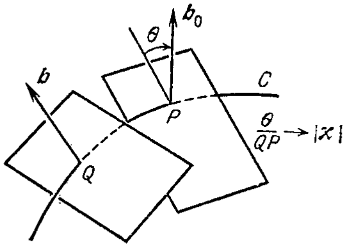

Рис. 36

кривой C в точках P и Q, то *при стремлении точки Q к точке P отношение угла θ к расстоянию между Q и P стремится к определенному пределу, который и равен абсолютному кручению кривой C в точке P* (рис. 36): $\lim\limits_{Q \to P} \frac{\theta}{QP} = |\varkappa|$.

Кручение допускает и несложное кинематическое истолкование. Представим себе, что некоторая плоскость перемещается в пространстве, причем ее фиксированная точка с единичной скоростью движется по кривой, фиксированная прямая в каждый момент времени касается кривой в этой точке, а сама плоскость все время является соприкасающейся плоскостью кривой. Тогда такое перемещение будет результатом поступательного движения и двух вращений — вращения этой плоскости вокруг бинормали и ее вращения вокруг касательной. Угловая скорость первого вращения равна кривизне кривой, а второго — абсолютному кручению кривой в точке соприкосновения. Знак кручения связан с направлением вращения: в случае, когда вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть из конца касательного вектора, то это плюс, а если по часовой стрелке — то минус (рис. 37).

Полученные нами ранее выражения для производных по естественному параметру вектор-функций $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$ представляют собой две из трех *формул Френе* (называемых также формулами Френе — Серре). Эти формулы дают разложение по базису Френе $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ производных от входящих в него векторов:

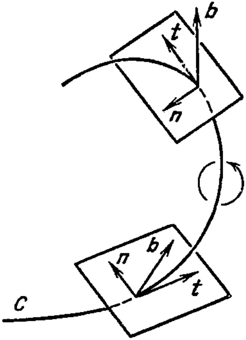

Рис. 37

$$\boldsymbol{t}'(s) = k(s)\,\boldsymbol{n}(s),$$
$$\boldsymbol{n}'(s) = -k(s)\,\boldsymbol{t}(s) + \varkappa(s)\,\boldsymbol{b}(s),$$
$$\boldsymbol{b}'(s) = -\varkappa(s)\,\boldsymbol{n}(s).$$

Первая и третья формулы нам уже известны. Вторая формула из них следует:

$$\boldsymbol{n}' = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t})' = \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}' =$$
$$= -\varkappa(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}) + k(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}) = \varkappa\boldsymbol{b} - k\boldsymbol{t}.$$

Иногда, имея в виду уравнение кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}(s)$, к числу формул Френе относят и формулу $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'$.