## § 7. Вычисление кручения

Пусть по-прежнему $g(s)$ — естественная параметризация гладкой кривой $C$, имеющей в каждой точке ненулевую кривизну.

Для вычисления кручения кривой $C$ воспользуемся формулами Френе:

$$\boldsymbol{g}'(s) = \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{g}''(s) = k\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{g}'''(s) = (k\boldsymbol{n})' = k'\boldsymbol{n} + k\boldsymbol{n}' =$$

$$= k'\boldsymbol{n} + k(-k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}) = -k^2\boldsymbol{t} + k'\boldsymbol{n} + k\varkappa\boldsymbol{b}.$$

Рассмотрим теперь смешанное произведение $(\boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'', \boldsymbol{g}''')$. Так как смешанное произведение не изменится, если прибавить к одному сомножителю или вычесть из него линейную комбинацию двух других, то

$$(\boldsymbol{g}'(s),\ \boldsymbol{g}''(s),\ \boldsymbol{g}'''(s)) = (\boldsymbol{t},\ k\boldsymbol{n},\ -k^2\boldsymbol{t} + k'\boldsymbol{n} + k\varkappa\boldsymbol{b}) = \\ = (\boldsymbol{t},\ k\boldsymbol{n},\ k\varkappa\boldsymbol{b}) = k^2(s)\cdot\varkappa(s).$$

Окончательно получаем

$$\varkappa = \frac{(\boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'', \boldsymbol{g}''')}{k^2}.$$

В этой формуле $k$ и $\varkappa$ являются функциями параметра $s$.

Мы нашли короткую формулу для вычисления кручения кривой, но ею можно пользоваться, только если кривая снабжена естественной параметризацией, а это бывает на практике крайне редко. Выведем формулу для кручения при произвольной параметризации.

Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ — произвольная, а $\boldsymbol{g}(s)$ — естественная параметризации кривой $C$, связанные заменой параметра $s = \psi(t) = \int\limits_a^t |\boldsymbol{f}'(\tau)|\,d\tau$. Тогда непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{g}'(s)\cdot\psi'(t),$$
$$\boldsymbol{f}''(t) = \boldsymbol{g}''(s)\cdot[\psi'(t)]^2 + \boldsymbol{g}'(s)\,\psi''(t),$$
$$\boldsymbol{f}'''(t) = \boldsymbol{g}'''(s)\cdot[\psi'(t)]^3 + 3\boldsymbol{g}''(s)\,\psi'(t)\,\psi''(t) + \boldsymbol{g}'(s)\,\psi'''(t).$$

Отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}'', \boldsymbol{f}''') = (\boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'', \boldsymbol{g}''')\cdot\psi'^6,$$

при этом $\psi' = |\boldsymbol{f}'|$. Пользуясь этим и тем, что $k = \dfrac{|\boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{f}''|}{|\boldsymbol{f}'|^3}$, из формулы для кручения в естественной параметризации получаем окончательно

$$\varkappa = \frac{(\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}'', \boldsymbol{f}''')}{|\boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{f}''|^2}.$$

Это формула для вычисления кручения в произвольной параметризации.