§ 8. Натуральные уравнения кривой

С каждой гладкой кривой, кривизна которой во всех точках отлична от нуля, мы связали три функции: $s(t)$, $k(t)$, $\varkappa(t)$, которые могут быть найдены по произвольной параметризации $f(t)$ этой кривой. Спрашивается: определяют ли эти функции полностью кривую и нет ли между ними каких-либо соотношений?

Мы можем наложить на них только тривиальные ограничения. Функции эти непрерывны, кроме того, $k(t) > 0$, $s'(t) > 0$ при любом t. Легко видеть, что от трех функций можно перейти к двум, взяв за параметр длину дуги s. Тогда $k(s)$ и $\varkappa(s)$ будут функциями, связанными непосредственно с кривой (и направлением на ней). Нам остается узнать, определяют ли они кривую однозначно и нет ли между ними каких-либо соотношений (таких, как $\sin' = \cos$ и $\sin^2 + \cos^2 = 1$).

Теорема. *Пусть C_1 и C_2 — две гладкие кривые, имеющие одинаковую длину, и $\boldsymbol{g}_1(s)$, $\boldsymbol{g}_2(s)$ — их естественные параметризации. Если в соответствующих точках эти кривые имеют одинаковые кривизну и кручение:*

$$k_1(s) \equiv k_2(s), \quad \varkappa_1(s) \equiv \varkappa_2(s),$$

то существует наложение, переводящее кривую C_1 в кривую C_2. Другими словами, кривизна и кручение определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

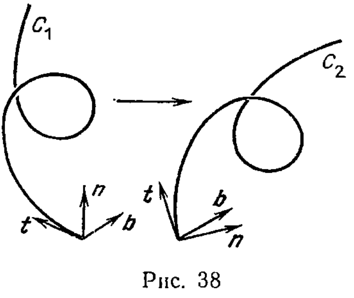

Рис. 38

Доказательство. Совместим наложением реперы Френе обеих кривых в начальных точках, соответствующих значению параметра $s = 0$: пусть $\boldsymbol{g}_1(0) = \boldsymbol{g}_2(0)$, $\boldsymbol{t}_1(0) = \boldsymbol{t}_2(0)$, $\boldsymbol{n}_1(0) = \boldsymbol{n}_2(0)$, $\boldsymbol{b}_1(0) = \boldsymbol{b}_2(0)$. В этих условиях требуется доказать, что кривые совпадают: $\boldsymbol{g}_1(s) \equiv \boldsymbol{g}_2(s)$. Мы будем рассматривать $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, k_1, k_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ как функции параметра s, но для краткости всюду опустим аргумент (рис. 38).

Рассмотрим функцию $\xi(s)$, определенную по формуле

$$\xi(s) = \boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2.$$

Докажем, что эта функция — постоянная. Для этого продифференцируем $\xi(s)$, пользуясь формулами

Френе, и приведем подобные:

$$\xi'(s) = t_1' \cdot t_2 + t_1 \cdot t_2' + n_1' \cdot n_2 + n_1 \cdot n_2' + b_1' \cdot b_2 + b_1 \cdot b_2' =$$
$$= k_1 n_1 t_2 + k_2 t_1 n_2 - (k_1 t_1 - \varkappa_1 b_1) n_2 - (k_2 t_2 - \varkappa_2 b_2) n_1 -$$
$$- \varkappa_1 n_1 b_2 - \varkappa_2 b_1 n_2 = 0.$$

Следовательно, $\xi(s) \equiv \xi(0) = 3$. Это означает, что $t_1(s) \equiv t_2(s)$, т. е. $g_1'(s) \equiv g_2'(s)$. Поскольку у вектор-функций $g_1(s)$ и $g_2(s)$ в каждой точке равны производные и совпадают их начальные значения ($g_1(0) = g_2(0)$), то эти функции равны: $g_1(s) \equiv g_2(s)$. Теорема доказана. □

Можно показать, что между кривизной и кручением нет нетривиальных соотношений. Более точно, *для любых непрерывных функций* $h(s)$ *и* $\eta(s)$, *определенных на отрезке* $[0, S]$, *первая из которых положительна, существует гладкая кривая* C, *кривизна и кручение которой определяются этими функциями*:

$$k = h(s), \quad \varkappa = \eta(s).$$

Доказательство этого факта мы не приводим. Оно использует теорему существования решения у системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Соотношения $k = h(s)$, $\varkappa = \eta(s)$ называются *натуральными уравнениями* кривой C. Их достоинство заключается в том, что они никак не зависят от выбора координат.

Как мы уже знаем, кривая C ими определена однозначно с точностью до положения в пространстве.