Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Элементарные поверхности в евклидовом пространстве. Способы их задания

Пусть Ф — множество в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$. Множество Ф называется *элементарной поверхностью*, если при проекции на некоторую плоскость оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображается на открытую область в этой плоскости (рис. 39).

Примеры. 1. Любая плоская область является элементарной поверхностью.

2. Сфера не является элементарной поверхностью, хотя таковой будет всякая достаточно малая сферическая область.

Если мы фиксируем плоскость, фигурирующую в определении элементарной поверхности, то получим возможность *явно задать* элементарную поверхность Ф. Пусть П — рассматриваемая плоскость. Введем в пространстве декартову систему координат xyz так, чтобы плоскость П совпадала с координатной плоскостью xy. Тогда проекция на плоскость П точки с координатами x, y, z будет иметь координаты x, y, 0.

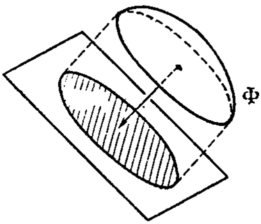

Рис. 39

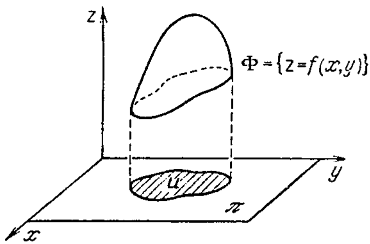

Рис. 40

Если область $U \subset$ П — образ элементарной поверхности Ф при проекции на П, то множество Ф будет графиком некоторой непрерывной функции $f(x, y)$, определенной в области U. Поэтому множество Ф можно задать уравнением

$$z = f(x, y).$$

Такое задание называется *явным*, а само уравнение называется *уравнением элементарной поверхности* Ф *в явном виде* (рис. 40).

Для многих целей элементарную поверхность Ф удобно рассматривать как образ области U при ее отображении в пространство $\mathbb{R}^3$, которое точке с координатами x, y ставит в соответствие точку с координатами x, y, $f(x, y)$. Это пример *параметрического задания* элементарной поверхности Ф.

Вообще, если элементарная поверхность Ф является образом плоской области V при непрерывном взаимно однозначном отображении F: $V \to \mathbb{R}^3$, то это отображение F называется *параметризацией* элементарной поверхности Ф. Элементарная поверхность, снабженная параметризацией, называется *параметризованной элементарной поверхностью*. Координаты в плоскости $\mathbf{R}^2$, в которой лежит область V, будем для определенности обозначать буквами u и v. Значениями двух параметров u и v полностью определяется положение любой точки P на поверхности: $P = F(u, v)$. Числа u и v будем также называть *внутренними координатами* точки P. Если точка P имеет координаты x, y, z, то при изменении параметров u и v координаты x, y, z тоже будут меняться — каждая из них является некоторой функцией от u и v:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v), \tag{1}$$

где f_1, f_2, f_3 — непрерывные числовые функции, заданные в области V. Функции f_1, f_2, f_3 полностью описывают параметризацию F и называются ее *координатными функциями*. Соотношения $x = f_1$, $y = f_2$, $z = f_3$ называются *уравнениями* параметризованной элементарной поверхности Ф (рис. 41).

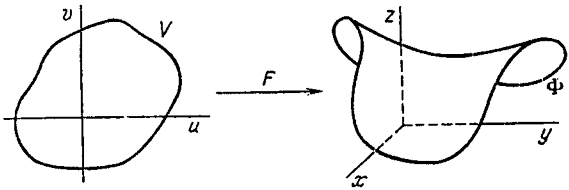

Рис. 41

Для нас основной интерес будут представлять элементарные поверхности, обладающие параметризацией с некоторыми дополнительными свойствами. Пусть $F\colon V \to \mathbf{R}^3$ — параметризация элементарной поверхности Ф, а f_1, f_2, f_3 — ее координатные функции. Если, во-первых, функции f_1, f_2, f_3 непрерывно дифференцируемы и, во-вторых, при каждом значении параметров u и v в точке (u, v) не обращается в нуль по крайней мере один из трех определителей

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

то параметризация F называется *регулярной*.

Элементарная поверхность, обладающая регулярной параметризацией, называется *гладкой*. При необходимости мы будем требовать от поверхности без дополнительных оговорок *повышенной гладкости*, т. е. существования у функций f_1, f_2, f_3 непрерывных частных производных всех порядков до n включительно, при некотором $n \geqslant 2$.

В случае явно заданной элементарной поверхности имеется простой достаточный критерий гладкости.

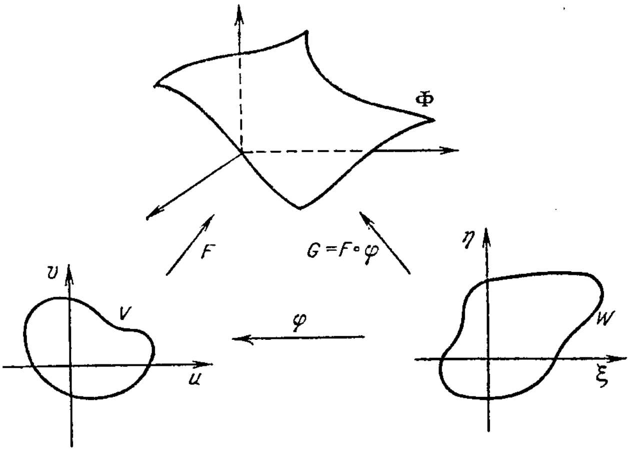

Рис. 42

Если $z = f(x, y)$ — явное уравнение элементарной поверхности Φ, то для того, чтобы Φ была гладкой, достаточно, чтобы функция f была непрерывно дифференцируемой. (Обратное, вообще говоря, неверно.)

Рассмотрим произвольное взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение φ некоторой плоской области W на область V (рис. 42):

$$\varphi\colon\ W \to V, \quad (\xi, \eta) \mapsto (u, v),$$

где $u = \varphi_1(\xi, \eta)$, $v = \varphi_2(\xi, \eta)$. Если $F\colon V \to \mathbf{R}^3$ — параметризация элементарной поверхности Φ, то сквозное отображение $G\colon W \to \mathbf{R}^3$, определенное по формуле $G(\xi, \eta) = F(\varphi_1(\xi, \eta), \varphi_2(\xi, \eta))$, также будет параметризацией для Φ. Говорят, что она получается из параметризации F при помощи *замены внутренних координат* $u = \varphi_1(\xi, \eta)$, $v = \varphi_2(\xi, \eta)$.

Для того чтобы параметризация $G(\xi, \eta)$ элементарной поверхности Φ, полученная заменой $(u, v) = \varphi(\xi, \eta)$ из регулярной параметризации F, была также регулярной, необходимо и достаточно, чтобы замена была *неособой*, т. е. чтобы функции φ_1 и φ_2 были непрерывно дифференцируемы и якобиан замены не обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Для доказательства воспользуйтесь правилом дифференцирования сложных функций.)

Всюду ниже в этой главе мы для краткости будем пользоваться термином ***поверхность***, имея при этом в виду только гладкие элементарные поверхности.