§ 2. Вектор-функции двух переменных

В предыдущем параграфе мы рассмотрели различные способы задания поверхностей. Они связаны с некоторой системой координат в пространстве и используют числовые функции двух переменных. Как и в случае кривых, часто мы будем пользоваться бескоординатным способом задания, при котором для параметризации поверхности служит вектор-функция двух переменных.

Вектор-функция двух переменных определена в некоторой области $W \subset \mathbf{R}^2$ и ставит в соответствие каждой точке $(x, y) \in W$ вектор $\boldsymbol{v}(x, y)$ трехмерного пространства (рис. 43). Все, что касается пределов, непрерывности и алгебраических операций над такими вектор-функциями, дословно повторяет уже известное нам о вектор-функциях одной переменной. Так же вводятся координатные функции v_1, v_2, v_3 (рис. 44). Небольшие отличия касаются дифференцирования: вместо одной производной у функции двух переменных есть две *частные* производные. Они обозначаются путем добавления к обозначению исходной функции нижних индексов, соответствующих переменным, по которым производится дифференцирование: $\boldsymbol{v}_x(x, y)$, $\boldsymbol{v}_y(x, y)$, а также $v'_x(x, y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\partial_x v$ и т. п.

Отметим, что если вместо x и y, стоящих в скобках, можно подставлять конкретные числа, то x и y, стоящие в качестве индексов, образуют *единый символ* с обозначением функции.

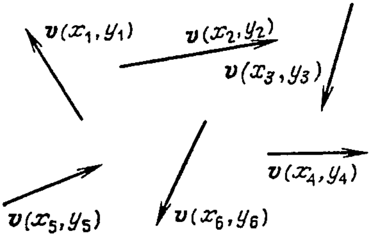

Рис. 43

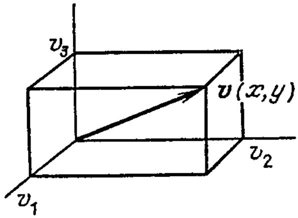

Рис. 44

Частные производные координатных функций функции $v(x, y)$ совпадают с кооодинатными функциями ее частных производных.

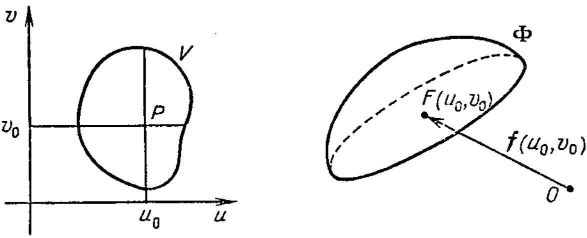

Рис. 45

Если F: $V \to \mathbf{R}^3$ — параметризация поверхности Ф, то вектор-функция f, определенная по формуле

$$f(u, v) = \overrightarrow{OF(u, v)},$$

называется *векторной параметризацией* поверхности Ф (рис. 45), а соотношение

$$\boldsymbol{r} = f(u, v)$$

называется ее *векторным уравнением*. В силу непрерывности функции F вектор-функция f также непрерывна. Если поверхность Ф гладкая, а F — ее регулярная параметризация, то функция f непрерывно дифференцируема в области V, причем ее частные производные в каждой точке линейно независимы:

$$f_u(u, v) \times f_v(u, v) \neq 0.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только векторными параметризациями, причем, как и в случае кривых, не будем различать точку и ее радиус-вектор и будем использовать запись $f(u, v) = P$ вместо $f(u, v) = \overrightarrow{OP}$.