§ 3. Кривые на гладкой поверхности

Пусть Φ — гладкая поверхность, заданная уравнением

$$r = f(u, v),$$

где $f\colon V \to \mathbf{R}^3$ — ее регулярная параметризация. Пусть $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$ — уравнения некоторой парамет-

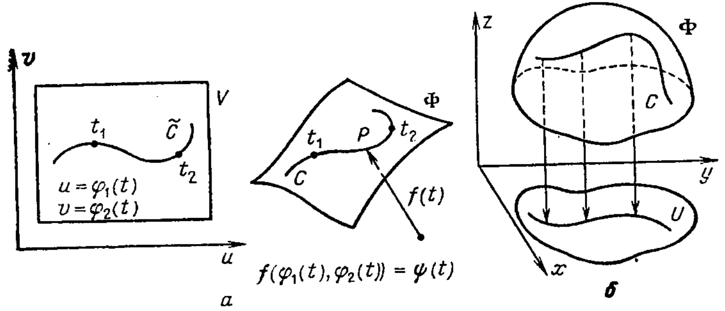

Рис. 46

ризованной кривой $\tilde{C}$ в области V. На поверхности Φ кривой $\tilde{C}$ соответствует кривая $C = f(\tilde{C})$, которая в пространстве задается векторным уравнением

$$r = \psi(t),$$

где $\psi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ (рис. 46).

Теорема. *Если кривая $\tilde{C}$ гладкая, то и кривая C тоже будет гладкой.*

Доказательство. Во-первых, ясно, что если функции $f(u, v)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ n раз непрерывно дифференцируемы, то и их композиция $\psi(t)$ будет n раз непрерывно дифференцируемой. Далее, воспользуемся равенством

$$\psi'(t) = \boldsymbol{f}_u(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \boldsymbol{f}_v(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t). \quad (2)$$

Так как в любой точке (u, v) векторы частных производных $\boldsymbol{f}_u$ и $\boldsymbol{f}_v$ линейно независимы, и при любом t хотя бы одно из чисел $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ не равно нулю, то и $\psi'(t) \neq 0$. Следовательно, $\psi'(t)$ есть регулярная па-

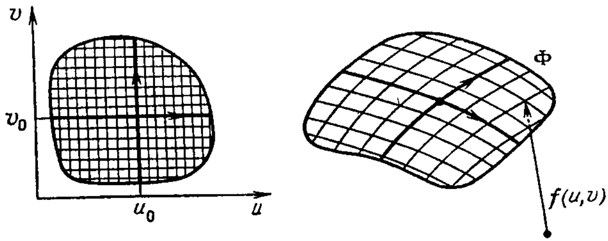

Рис. 47

раметризация кривой C, которая, таким образом, является гладкой. Теорема доказана. □

Параметрические уравнения кривой $\tilde{C}$ в области V

$$u = \varphi_1(t), \quad v = \varphi_2(t)$$

называются *внутренними уравнениями* кривой C на поверхности Ф.

Особый интерес представляют кривые, которые являются образами отрезков в области V, параллельных осям координат (рис. 47). Они задаются внутренними уравнениями вида

$$u = t, \quad v = v_0 = \text{const};$$

$$u = u_0 = \text{const}, \quad v = t$$

и называются *координатными линиями* на параметризованной поверхности Ф. Мы теперь можем дать геометрическое истолкование векторов частных производных функции $\boldsymbol{f}(u, v)$. Из формулы (2) видно, что векторы $\boldsymbol{f}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{f}_v(u_0, v_0)$ — касательные к координатным линиям в точке $P = \boldsymbol{f}(u_0, v_0)$. Поскольку поверхность Ф гладкая, а $\boldsymbol{f}(u, v)$ — ее регулярная параметризация, то векторы $\boldsymbol{f}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{f}_v(u_0, v_0)$

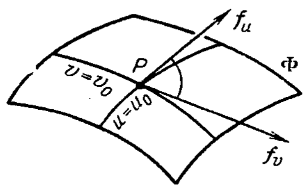

Рис. 48

неколлинеарны, и угол между ними равен углу между координатными линиями в точке P (рис. 48).

В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие кривые на поверхности, заданные своими регулярными параметризациями.