## § 4. Касательная плоскость поверхности

Пусть $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ — гладкая поверхность, а $P$ — некоторая ее точка. Говорят, что прямая *касается* поверхности $\Phi$ в точке $P$, если она является касательной прямой в точке $P$ некоторой кривой, лежащей в поверхности $\Phi$ и проходящей через точку $P$ (рис. 49).

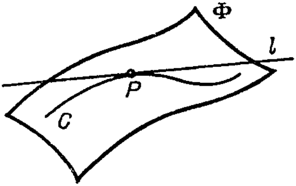


Рис. 49

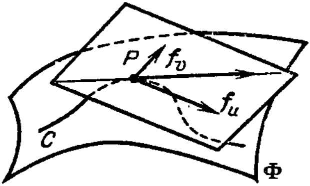


Рис. 50

**Теорема 1.** *Все прямые, касающиеся поверхности $\Phi$ в точке $P$, лежат в одной плоскости.*

Доказательство. Пусть поверхность $\Phi$ задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(u, v).$$

Тогда, как видно из формулы (2) § 3, касательный вектор в точке $P = \mathbf{f}(u_0, v_0)$ любой кривой, проходящей через точку $P$ и лежащей в поверхности $\Phi$, является линейной комбинацией векторов частных производных $\mathbf{f}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{f}_v(u_0, v_0)$. Следовательно, каждый такой вектор, если его отложить из точки $P$, будет лежать в плоскости, проходящей через эту точку и содержащей векторы $\mathbf{f}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{f}_v(u_0, v_0)$ (рис. 50). Ясно, что в этой же плоскости лежат и все рассматриваемые касательные прямые. Теорема доказана. □

Плоскость, в которой лежат все прямые, касающиеся поверхности $\Phi$ в точке $P$, называется *касательной плоскостью*. Мы будем обозначать ее через $T_P\Phi$.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{f}(u, v)$ — уравнение поверхности, то в качестве нормального вектора к касательной плоскости в точке $P = f(u_0, v_0)$ естественно взять векторное произведение $f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0)$, поскольку векторы $f_u(u_0, v_0)$ и $f_v(u_0, v_0)$ заведомо в ней лежат (рис. 51). В этом случае векторное уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(r - f(u_0, v_0),\ f_u(u_0, v_0),\ f_v(u_0, v_0)) = 0.$$

В координатах это уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_u f_3(u_0, v_0) \\ \partial_v f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_3(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $x_0 = f_1(u_0, v_0)$, $y_0 = f_2(u_0, v_0)$, $z_0 = f_3(u_0, v_0)$. *Единичный вектор нормали* к поверхности в точке $P$ о ределяется по формуле

$$n = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}.$$

Эта формула задает нормаль поверхности Ф как вектор-функцию внутренних координат $u$ и $v$ (рис. 52).

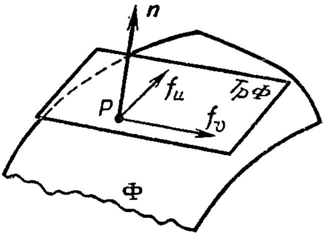


Рис. 51

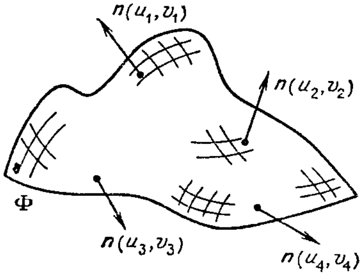


Рис. 52

Касательная плоскость с точностью до величин первого порядка малости приближает поверхность в данной ее точке. Более точно, пусть $Q$ — точка поверхности Ф, близкая к точке $P$. *При стремлении точки $Q$ к точке $P$ отношение расстояния $h$ от точки $Q$ до касательной плоскости $T_P\Phi$ к расстоянию от $Q$ до $P$ стремится к нулю*:

$$\lim_{Q \to P} \frac{h}{QP} = 0.$$

*Касательная плоскость — единственная, обладающая этим свойством* (рис. 53).

Доказывать этого мы не будем.

С касательной плоскостью в точке $P$ связано одно очень удобное явное задание поверхности Ф в некоторой малой окрестности этой точки.

**Теорема 2.** *Пусть Ф — гладкая поверхность и $P$ — произвольная ее точка. Рассмотрим декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой $P$, а ось $z$ направлена по нормали к поверхности. (При этом оси $x$ и $y$ окажутся лежащими в касательной*

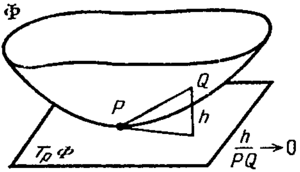


Рис. 53

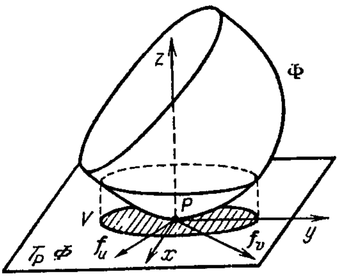


Рис. 54

*плоскости $T_P$Ф.) Тогда у точки $P$ найдется окрестность в поверхности, которую в координатах $x$, $y$, $z$ можно задать явным уравнением*

$$z = f(x, y),$$

*где функция $f(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой достаточно малой окрестности точки* $(0, 0)$ *на плоскости $x$, $y$, причем в самой точке* $(0, 0)$ *имеют место соотношения*

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

*Кроме того, если поверхность Ф допускает $n$ раз непрерывно дифференцируемую регулярную параметризацию, то функция $f(x, y)$ тоже $n$ раз непрерывно дифференцируема* (рис. 54).

Доказательство. Пусть поверхность Ф задана уравнениями

$$\begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), \\ z = f_3(u, v), \end{cases}$$

причем $f_1(u_0, v_0) = f_2(u_0, v_0) = f_3(u_0, v_0) = 0$. Рассмотрим проекцию поверхности Ф на плоскость $xy$. При этой проекции точка с внутренними координатами $(u, v)$ отображается в точку с координатами $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$. Рассмотрим векторы частных производных (где $\partial_u f_1 = (f_1)_u$ и т. д.):

$$\mathbf{f}_u = (\partial_u f_1,\ \partial_u f_2,\ \partial_u f_3),$$
$$\mathbf{f}_v = (\partial_v f_1,\ \partial_v f_2,\ \partial_v f_3).$$

Поскольку, в силу выбора системы координат, векторы $\mathbf{f}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{f}_v(u_0, v_0)$ лежат в плоскости $xy$, то

$$\partial_u f_3(u_0,\ v_0) = \partial_v f_3(u_0,\ v_0) = 0.$$

Следовательно, в силу линейной независимости векторов $\mathbf{f}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{f}_v(u_0, v_0)$ получаем

$$\begin{vmatrix} \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_u f_2(u_0, v_0) \\ \partial_v f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если мы рассмотрим теперь отображение области $V$ в плоскость $xy$, заданное формулами

$$x = f_1(u,\ v), \quad y = f_2(u,\ v),$$

то из теоремы об обратной функции будет следовать, что в некоторой окрестности $U_0$ точки $(0, 0)$ определено обратное отображение $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \varphi_2(x, y)$. Теперь ясно, что искомую функцию $f$ можно определить по формуле

$$f(x,\ y) = f_3(\varphi_1(x,\ y),\ \varphi_2(x,\ y)).$$

То, что $f(0, 0) = 0$, очевидно. То, что $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, следует из того, что в точке $(u_0, v_0) = (\varphi_1(0, 0),\ \varphi_2(0, 0))$ частные производные функции $f_3$ обращаются в нуль. Наконец, если параметризация $\mathbf{f}(u, v)$ непрерывно дифференцируема $n$ раз, то вместе с ее координатными функциями $f_1$, $f_2$ $n$ раз непрерывно дифференцируемы функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Теперь функция $f$ непрерывно дифференцируема $n$ раз как композиция функций $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $n$ раз непрерывно дифференцируемой функции $f_3$. Теорема 2 доказана. □

**Направления на поверхности.** Пусть $l$ — некоторая прямая, проходящая через точку $P$ поверхности и лежащая в касательной плоскости $T_P$Ф. Будем говорить, что кривая $C$ на поверхности проходит через точку $P$

*в направлении* прямой $l$, если $l$ — касательная кривой $C$ в точке $P$ (рис. 49). Если через точку $P$ проходят две кривые $C_1$ и $C_2$, то *углом между ними* назовем угол между их касательными в этой точке. Очевидно, что угол между кривыми зависит только от их направлений в точке $P$ (рис. 55).

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную касательной плоскости $T_P\Phi$ и пересекающую ее по прямой $l$, которая по-прежнему проходит через $P$. Из доказанной выше теоремы 2 следует, что пересечение

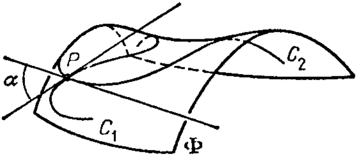


Рис. 55

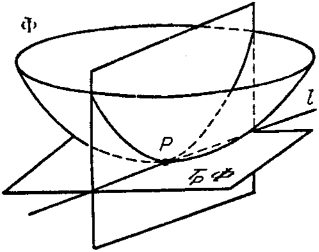


Рис. 56

этой плоскости с достаточно малой окрестностью точки $P$ на поверхности является гладкой кривой (это график сужения функции $f$ из теоремы на прямую $l$) Эта кривая называется *нормальным сечением* поверхности Ф в точке $P$ в направлении прямой $l$. Очевидно, что $l$ — касательная прямая этого нормального сечения. Более общим образом, касательная к кривой на поверхности всегда лежит в пересечении соприкасающейся плоскости кривой и касательной плоскости поверхности (рис. 56). (Проверьте это!)