§ 5. Первая квадратичная форма поверхности. Измерение длин кривых и углов между ними

Длина кривой на поверхности. Пусть Ф — гладкая поверхность, заданная векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v)$. Рассмотрим гладкую кривую C на поверхности Ф, заданную внутренними уравнениями $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$, где $t \in [a, b]$. Нас интересует длина S кривой C. В пространстве кривая C задана векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, где $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{f}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Теперь длину S можно найти по известной формуле, см. § I. 4:

$$S=\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

Вычислим длину вектора $\varphi'(t)$. По формуле (2) § 3

$$\varphi'(t)=f_u(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t))\cdot\varphi_1'(t)+f_v(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t))\cdot\varphi_2'(t),$$

или, более коротко,

$$\varphi'=f_u(\varphi_1,\ \varphi_2)\cdot\varphi_1'+f_v(\varphi_1,\ \varphi_2)\cdot\varphi_2'.$$

Далее получаем, для краткости опуская t,

$$|\varphi'(t)|^2=|\varphi'|^2=\varphi'\cdot\varphi'=$$
$$=f_u^2(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_1'^2+2f_u(\varphi_1,\varphi_2)f_v(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'+f_v^2(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2'^2.$$

Введем обозначения. Положим

$$E(u,\ v)=f_u^2(u,\ v),$$
$$F(u,\ v)=f_u(u,\ v)\cdot f_v(u,\ v),$$
$$G(u,\ v)=f_v^2(u,\ v).$$

Тогда формула для квадрата длины вектора $\varphi'(t)$ примет вид

$$|\varphi'(t)|^2=E(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_1'^2+2F(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'+G(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_2'^2.$$

Наконец, подставляя корень из этого выражения в формулу длины, получим:

$$S=\int_a^b\sqrt{E(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_1'^2+2F(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'+G(\varphi_1,\ \varphi_2)\varphi_2'^2}\,dt. \tag{*}$$

Имея в виду внутренние уравнения кривой C и опуская для краткости аргументы у функций E, F, G, эту формулу часто записывают так

$$S=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=$$
$$=\int_a^b\sqrt{Eu_t^2+2Fu_tv_t+Gv_t^2}\,dt.$$

(Но нельзя забывать, что E, F и G — это не числа, а *числовые функции*, зависящие от внутренних координат u и v!)

Первая квадратичная форма поверхности. На первый взгляд, формула (*) кажется сложнее, чем исходное выражение $S=\int_a^b|\varphi'|\,dt$. Однако полученная формула (*) имеет следующее важное преимущество: в ней выделены функции E, F и G, которые не зависят от выбора кривой C, а зависят только от поверхности и ее параметризации. Если ищутся длины сразу нескольких различных кривых на поверхности, то удобно сначала найти функции E, F и G, а потом подставлять в формулу (*) функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и пределы интегрирования, которые отвечают той или другой кривой.

Кроме того, эта формула дает возможность говорить о длине кривой на поверхности, когда известны ее внутренние уравнения и функции E, F и G, а точный вид параметризации неизвестен (т. е. не задан точный вид поверхности). Это важно при общем изучении поверхностей (ср. § 12).

Определение. Функции E, F, G называются *коэффициентами первой квадратичной формы* поверхности Φ, а сама *первая квадратичная форма* I определяется по формуле

$$\mathrm{I}(\varphi_1', \varphi_2')=E\cdot\varphi_1'^2+2F\cdot\varphi_1'\varphi_2'+G\cdot\varphi_2'^2.$$

(Другое название — первая основная или первая фундаментальная форма поверхности.) Можно заметить, что матрица

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

является матрицей скалярного произведения в касательной плоскости к поверхности, записанная в базисе f_u, f_v.

Пример. Для поверхности, заданной явным уравнением $z=f(x,y)$, коэффициенты первой квадратичной формы имеют вид:

$$E(x, y)=1+f_x^2(x, y),$$
$$F(x, y)=f_x(x, y)\cdot f_y(x, y),$$
$$G(x, y)=1+f_y^2(x, y).$$

Угол между кривыми на поверхности. Пусть C_1 и C_2 — две кривые на поверхности Ф, заданные своими внутренними уравнениями

$$u = \varphi_1(t), \quad v = \varphi_2(t); \qquad u = \psi_1(t), \quad v = \psi_2(t).$$

Если C_1 и C_2 проходят через одну и ту же точку $P = \mathbf{f}(u_0, v_0)$ на поверхности, то при помощи коэффициентов E, F, G первой квадратичной формы можно найти угол θ между этими кривыми в точке P (он равен углу между касательными прямыми этих кривых). Если $u_0 = \varphi_1(t_0) = \psi_1(\tau_0)$, $v_0 = \varphi_2(t_0) = \psi_2(\tau_0)$, то

$$\cos\theta = \frac{\varphi'(t_0)\cdot\psi'(\tau_0)}{|\varphi'(t_0)|\cdot|\psi'(\tau_0)|},$$

где, как и раньше, $\varphi' = \mathbf{f}_u\cdot\varphi_1' + \mathbf{f}_v\cdot\varphi_2'$ и $\psi' = \mathbf{f}_u\psi_1' + \mathbf{f}_v\psi_2'$ — касательные векторы к кривым C_1 и C_2. Положим для краткости

$$\varphi' = \varphi'(t_0), \quad \varphi_1' = \varphi_1'(t_0), \quad \varphi_2' = \varphi_2'(t_0);$$
$$\psi' = \psi'(\tau_0), \quad \psi_1' = \psi_1'(\tau_0), \quad \psi_2' = \psi_2'(\tau_0);$$
$$\mathbf{f}_u = \mathbf{f}_u(u_0, v_0), \quad \mathbf{f}_v = \mathbf{f}_v(u_0, v_0);$$
$$E = E(u_0, v_0), \; F = F(u_0, v_0), \; G = G(u_0, v_0).$$

Тогда скалярное произведение в числителе рассматриваемой дроби можно найти по формуле

$$\varphi'\cdot\psi' = (\varphi_1'\mathbf{f}_u + \varphi_2'\mathbf{f}_v)\cdot(\psi_1'\mathbf{f}_u + \psi_2'\mathbf{f}_v) = \\ = E\cdot\varphi_1'\psi_1' + F(\varphi_1'\psi_2' + \varphi_2'\psi_1') + G\varphi_2'\psi_2'.$$

Длины векторов φ' и ψ' находятся по формулам

$$|\varphi'| = \sqrt{E\varphi_1'^2 + 2F\varphi_1'\varphi_2' + G\varphi_2'^2} = \sqrt{\mathrm{I}(\varphi_1', \varphi_2')},$$
$$|\psi'| = \sqrt{E\psi_1'^2 + 2F\psi_1'\psi_2' + G\psi_2'^2} = \sqrt{\mathrm{I}(\psi_1', \psi_2')}.$$

Выясним теперь геометрический смысл коэффициентов первой квадратичной формы. E и G представляют собой квадраты масштабов координатных линий — длины малых дуг координатных u- и v-линий примерно в $\sqrt{E}$ и $\sqrt{G}$ раз больше соответствующих дуг в области V. Геометрический смысл коэффициента F сложнее:

$$F = f_u \cdot f_v = |f_u| \cdot |f_v| \cdot \cos\omega,$$

где ω — угол между координатными линиями. Отсюда

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

В частности, чтобы координатные линии в каждой точке были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $F \equiv 0$.

Выясним геометрический смысл выражения $\sqrt{EG - F^2}$, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$EG - F^2 = f_u^2 f_v^2 - f_u^2 f_v^2 \cos^2\omega = f_u^2 f_v^2 \sin^2\omega = (f_u \times f_v)^2.$$

Таким образом, число $\sqrt{EG - F^2}$ равняется площади параллелограмма, натянутого на векторы частных производных f_u и f_v (рис. 57).

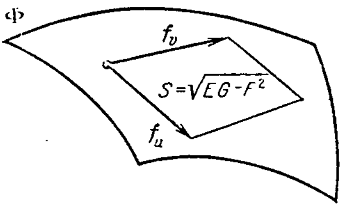

Рис. 57

Внутренняя геометрия поверхности. Подведем итоги. Как мы видели, для определения длины кривой на поверхности совершенно не нужно знать, что из себя представляет поверхность. Достаточно знать ее первую квадратичную форму. Это же относится и к углу между кривыми. Как мы увидим в § 10, площади фигур на поверхности тоже могут быть найдены только по коэффициентам E, F и G. Говорят, что первая квадратичная форма отвечает за *внутреннюю геометрию* поверхности. (Подробнее см. § 12.)

На поверхности внутренние координаты можно выбирать многими способами. С точки зрения вычислений было бы разумно выбрать их так, чтобы упростить коэффициенты первой квадратичной формы.

Оказывается, что на всякой поверхности координаты можно ввести так, чтобы $E(u, v) \equiv 1$, $F(u, v) \equiv 0$. При этом функция $G(u, v)$, в принципе, может быть любой положительной. Такая система называется *полугеодезической* (см. § 15).

Другой удобный вид координат — *изотермические* или *конформные* координаты. В этой системе $F(u, v) \equiv 0$, $E(u, v) \equiv G(u, v)$. Эти координаты замечательны тем, что лежащие в области V прообразы «маленьких фигур» на поверхности Ф почти подобны им, а углы между кривыми сохраняются.

Наконец, упомянем *чебышевские* координаты: в них $E(u, v) \equiv G(u, v) \equiv 1$. Здесь длины координатных линий вообще не меняются, а $F(u, v)$ равняется косинусу угла между координатными линиями: $F = \cos\omega$. Эти координаты применяются в задачах, связанных с раскроем (ткани, металла и т. п.).