§ 6. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

Пусть Φ — гладкая поверхность, параметризованная вектор-функцией $f(u, v)$, а C — гладкая кривая на этой поверхности, заданная своими внутренними уравнениями $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$, которым соответствует ее параметризация $\varphi(t) = f(\varphi_1, \varphi_2)$. Пусть $P = \varphi(t_0)$ — точка на кривой C. Найдем формулу для кривизны кривой C в точке P. Обозначим через θ угол между нормалью n поверхности Φ в точке P и главной нормалью m кривой C в точке P (рис. 58).

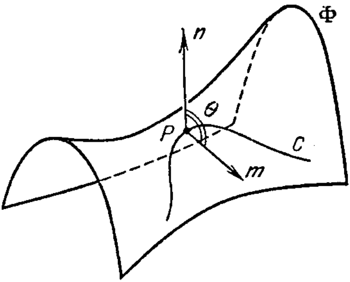

Рис. 58

Рассмотрим естественную параметризацию $\psi(s)$ кривой C. Пусть она соответствует внутренним уравнениям $u = \psi_1(s)$, $v = \psi_2(s)$, и пусть при этом $P = \psi(s_0)$. Кривизна k кривой C в точке P вычисляется по формуле (см. гл. I, § 5)

$$k = |\psi''(s_0)| = \frac{\psi''(s_0) \cdot n}{\cos\theta}.$$

Чтобы найти $\psi''(s_0)$, продифференцируем выражение для $\psi'(s)$:

$$\psi'(s) = f_u(\psi_1, \psi_2)\,\psi_1' + f_v(\psi_1, \psi_2)\,\psi_2'$$

Проделав несложные вычисления, получим

$$\psi''(s) = \boldsymbol{f}_{uu}(\psi_1, \psi_2)\,\psi_1'^2 + 2\boldsymbol{f}_{uv}(\psi_1, \psi_2)\,\psi_1'\psi_2' + \\ + \boldsymbol{f}_{vv}(\psi_1, \psi_2)\,\psi_2'^2 + \boldsymbol{f}_u(\psi_1, \psi_2)\,\psi_1'' + \boldsymbol{f}_v(\psi_1, \psi_2)\,\psi_2''.$$

При скалярном умножении на вектор $\boldsymbol{n}$ последние два слагаемых дадут нуль, так как первые производные вектор-функции $\boldsymbol{f}$ ортогональны вектору $\boldsymbol{n}$.

Для скалярных произведений на вектор $\boldsymbol{n}$ вторых производных вектор-функции $\boldsymbol{f}$ приняты специальные обозначения:

$$L(u, v) = \boldsymbol{f}_{uu}(u, v) \cdot \boldsymbol{n}(u, v),$$
$$M(u, v) = \boldsymbol{f}_{uv}(u, v) \cdot \boldsymbol{n}(u, v),$$
$$N(u, v) = \boldsymbol{f}_{vv}(u, v) \cdot \boldsymbol{n}(u, v),$$

или, короче,

$$L = \boldsymbol{f}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}, \quad M = \boldsymbol{f}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}, \quad N = \boldsymbol{f}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Пользуясь этими обозначениями, можно записать

$$k \cdot \cos\theta = \psi''(s_0) \cdot \boldsymbol{n}(\psi_1(s_0), \psi_2(s_0)) = \psi'' \cdot \boldsymbol{n} = \\ = L(\psi_1, \psi_2)\,\psi_1'^2 + 2M(\psi_1, \psi_2) \cdot \psi_1'\psi_2' + N(\psi_1, \psi_2)\,\psi_2'^2,$$

где значения функций ψ_1, ψ_2, ψ_1', ψ_2' берутся в точке s_0. Более краткая запись:

$$k \cdot \cos\theta = L \cdot \psi_1'^2 + 2M \cdot \psi_1'\psi_2' + N \cdot \psi_2'^2.$$

(Но нельзя забывать, что L, M и N — *числовые функции* двух переменных u и v!)

Вернемся к исходной параметризации $\varphi(t)$. Поскольку $\psi'(s) = \dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$, то $\psi_1' = \dfrac{\varphi_1'}{|\varphi'|}$, $\psi_2' = \dfrac{\varphi_2'}{|\varphi'|}$, где все значения берутся по-прежнему в s_0 и t_0. Подставляя в предыдущую формулу, получим

$$k \cdot \cos\theta = \frac{L \cdot \varphi_1'^2 + 2M \cdot \varphi_1'\varphi_2' + N \cdot \varphi_2'^2}{E \cdot \varphi_1'^2 + 2F \cdot \varphi_1'\varphi_2' + G \cdot \varphi_2'^2}.$$

Функции L, M, N называются *коэффициентами второй квадратичной формы*, а сама вторая форма определяется по формуле

$$\mathrm{II}(\varphi_1', \varphi_2') = L \cdot \varphi_1'^2 + 2M \cdot \varphi_1'\varphi_2' + N \cdot \varphi_2'^2.$$

Часто удобно считать вторую квадратичную форму функцией, определенной на множестве касательных векторов или просто на касательной плоскости $T_P\Phi$.

Теперь полученное выражение для кривизны кривой C в точке P принимает вид

$$k = \frac{\mathrm{II}\left(\varphi_1', \varphi_2'\right)}{\mathrm{I}\left(\varphi_1', \varphi_2'\right) \cdot \cos\theta}.$$

Нормальная кривизна поверхности. Особый интерес представляют кривые, для которых $\cos\theta = \pm 1$, т. е. те кривые, чья соприкасающаяся плоскость в точке P перпендикулярна касательной плоскости $T_P\Phi$. Пусть l — касательная прямая кривой C в точке P. Рассмотрим плоскость, проходящую через l и нормаль к Φ в точке P. Ее пересечение с достаточно малой окрестностью точки P на поверхности Φ дает нам неособую кривую C_0 — нормальное сечение поверхности Φ в направлении касательной l. Если θ_0 — угол между главной нормалью m_0 к C_0 и нормалью n к поверхности в точке P, то $\cos\theta_0 = \pm 1$. Пусть k_0 — кривизна этой кривой в точке P. Тогда число

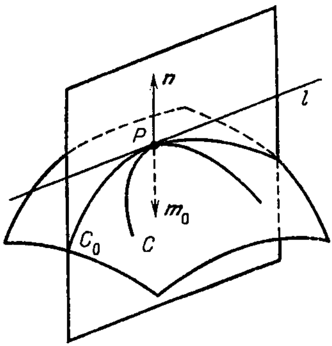

Рис. 59

$$k_n = k_0 \cdot \cos\theta_0 = \mathrm{II}/\mathrm{I}$$

называется *нормальной кривизной* поверхности Φ в направлении касательной l (рис. 59).

Теорема 1 (Мёньс). *Кривизна k кривой C на поверхности зависит только от угла θ и нормальной кривизны k_n в направлении касательной этой кривой. Она может быть вычислена по формуле*

$$k = \frac{k_n}{\cos\theta}.$$

Доказательство. Пусть кривая C_0 параметризована вектор-функцией $\rho(\tau)$, причем $P = \rho(\tau_0)$, а соответствующие внутренние уравнения имеют вид

$u=\rho_1(\tau)$, $v=\rho_2(\tau)$. Так как в точке P у кривых C и C_0 общая касательная, то $\varphi'(t_0)=a\rho'(\tau_0)$ для некоторого $a\neq 0$. Следовательно, $\varphi_1'(t_0)=a\rho_1'(\tau_0)$, $\varphi_2'(t_0)=$ $=a\rho_2'(\tau_0)$. Тогда в точке P имеем окончательно

$$k\cos\theta=\frac{\mathrm{II}(\varphi_1',\varphi_2')}{\mathrm{I}(\varphi_1',\varphi_2')}=\frac{\mathrm{II}(a\rho_1',a\rho_2')}{\mathrm{I}(a\rho_1',a\rho_2')}=\frac{a^2\mathrm{II}(\rho_1',\rho_2')}{a^2\mathrm{I}(\rho_1',\rho_2')}=$$

$$=\frac{\mathrm{II}(\rho_1',\rho_2')}{\mathrm{I}(\rho_1',\rho_2')}=k_0\cdot\cos\theta_0=k_n.$$

Что и требовалось доказать. □

Нормальную кривизну k_n поверхности Ф в направлении касательной l будем также называть *нормальной кривизной кривой C в точке P* и обозначать так же: k_n.

Если две кривые на поверхности Ф, проходящие через точку P, имеют в ней общую касательную, то, очевидно, их нормальные кривизны в этой точке совпадают.

Если $\boldsymbol{k}$ — вектор кривизны кривой C в точке P, то его скалярное произведение на вектор нормали $\boldsymbol{n}$ равно нормальной кривизне кривой C в точке P:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{k}|\cdot\cos\theta=$$
$$=k\cdot\cos\theta=k_n.$$

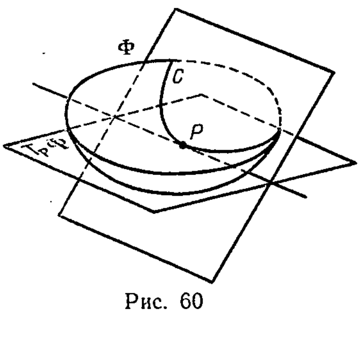

Рис. 60

Проиллюстрируем понятие нормальной кривизны.

Теорема 2. *Если две кривые на поверхности* Ф *проходят через точку P и имеют в ней общую соприкасающуюся плоскость, не совпадающую с касательной плоскостью $T_P\Phi$, то их кривизны в этой точке равны.*

Доказательство. Пусть две кривые C_1 и C_2 проходят через точку P. Очевидно, что прямая, по которой пересекается с касательной плоскостью $T_P\Phi$ их общая соприкасающаяся плоскость, является общей касательной этих кривых. Следовательно, их нормальные кривизны в точке P совпадают:

$$k_n(C_1)=k_n(C_2).$$

Если θ — угол между соприкасающейся плоскостью этих кривых и нормалью к поверхности в точке P, то, по теореме Мёнье,

$$k(C_1) = \frac{|k_n(C_1)|}{\cos\theta} = \frac{|k_n(C_2)|}{\cos\theta} = k(C_2),$$

где $k(C_1)$, $k(C_2)$ — кривизны кривых C_1 и C_2 в точке P. Теорема 2 доказана. □

Следствие. *Кривизна кривой, лежащей на поверхности, в каждой точке равна кривизне сечения поверхности соприкасающейся плоскостью кривой в этой же точке* (рис. 60). □