§ 7. Соприкасающийся параболоид

Здесь мы займемся локальным описанием поверхности с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Пусть P — произвольная точка гладкой поверхности Ф. Для изучения нормальных кривизн в точке P перейдем к явному заданию поверхности Ф. Рассмотрим декартову систему координат xyz, начало которой совпадает с точкой P, а ось z направлена по нормали к касательной плоскости $T_P\Phi$. Тогда, как показано в § 4, некоторая достаточно малая окрестность точки P на поверхности Ф обладает явным заданием

$$z = f(x, y),$$

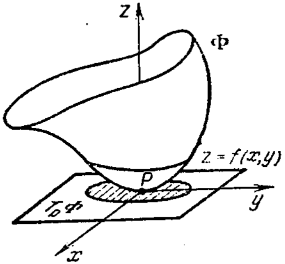


Рис. 61

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ на плоскости xy (рис. 61), причем

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Оказывается, что за счет поворота осей x и y можно еще более упростить ситуацию и добиться того, чтобы в новых координатах $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ в точке $(0, 0)$ обращались бы в нуль не только функция f и ее первые частные производные, но и смешанная частная производная:

$$f_{\tilde{x}\tilde{y}}(0, 0) = 0.$$

Вместо того чтобы доказывать это непосредственно, мы воспользуемся известными результатами о поверхностях второго порядка.

Рассмотрим функцию $\bar{f}(x, y)$, определенную по формуле

$$\bar{f}(x,\ y)=\frac{1}{2}(f_{xx}(0,\ 0)\,x^2+2f_{xy}(0,\ 0)\,xy+f_{yy}(0,\ 0)\,y^2).$$

Это многочлен второй степени, причем все частные производные первого и второго порядка у $\bar{f}$ и у f в начале координат равны. Нетрудно убедиться, что это выполняется и в любой другой системе координат (с тем же началом).

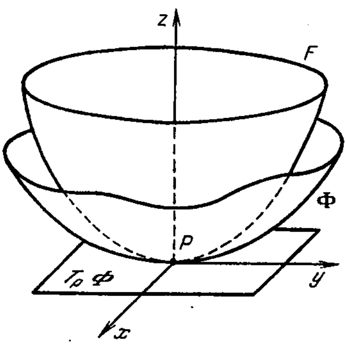


Рис. 62

Функция $\bar{f}$ допускает важное геометрическое истолкование: число $\bar{f}(x_0, y_0)$ равняется половине произведения нормальной кривизны поверхности Ф в точке $P(0, 0, 0)$ в направлении прямой $xy_0 - yx_0 = 0$ на квадрат расстояния точки (x_0, y_0) от точки P. Это можно увидеть из формулы для нормальной кривизны и того, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм в точке P в параметризации $(u, v, f(u, v))$ вычисляются по очевидным формулам

$$E=1,\quad F=0,\quad G=1;$$
$$L=f_{xx}(0,\ 0),\quad M=f_{xy}(0,\ 0),\quad N=f_{yy}(0,\ 0).$$

Поверхность F, заданная уравнением

$$z=\bar{f}(x,\ y),$$

называется *соприкасающимся параболоидом* поверхности Ф в точке P. Фактически F может представлять собой эллиптический или гиперболический параболоид, параболический цилиндр или плоскость (рис. 62).

Соприкасающийся параболоид F обладает рядом замечательных свойств, каждое из которых можно было бы при его определении взять за основу.

Во-первых, как мы уже знаем, F является графиком половины от второй квадратичной формы II в точке P, если II рассматривать как функцию на касательной плоскости $T_P\Phi$.

Во-вторых, в точке P у поверхностей F и Φ нормальные кривизны в любом направлении совпадают.

Наконец, при помощи формулы Тэйлора можно показать, что соприкасающийся параболоид F с точностью до малых второго порядка приближает поверхность Φ в точке P. (Здесь мы условно причисляем плоскость и параболический цилиндр к параболои-

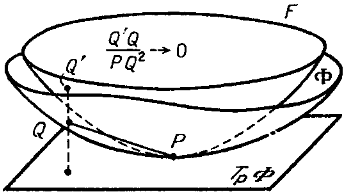


Рис. 63

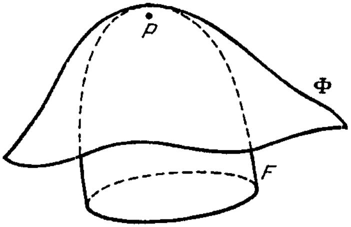


Рис. 64

Более точно, пусть Q — точка поверхности Φ, близкая к точке P, а Q' — такая точка параболоида F, что прямая $Q'Q$ перпендикулярна плоскости $T_P\Phi$. Тогда *при стремлении точки Q к точке P отношение квадрата расстояния от Q' до Q к расстоянию от Q до P стремится к нулю* (рис. 63):

$$\lim_{Q \to P} \frac{Q'Q}{PQ^2} = 0.$$

Соприкасающийся параболоид — единственный, обладающий этим свойством.

Типы точек на поверхности. Можно произвести классификацию точек поверхности в соответствии с типом соприкасающегося параболоида. Пусть по-прежнему F — соприкасающийся параболоид поверхности Φ в точке P.

P называется точкой *эллиптического типа*, если F — эллиптический параболоид (рис. 64). P называется точкой *гиперболического типа*, если F — гиперболический параболоид (рис. 65). P называется точкой *параболического типа*, если F — параболический цилиндр или плоскость (рис. 67, 68). Точка P эллиптического типа называется *точкой округления* или *омбилической*, если F — параболоид вращения (рис. 66). Наконец, точка P параболического типа называется *точкой уплощения*, если F — плоскость.

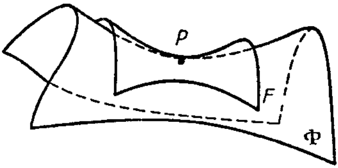


Рис. 65

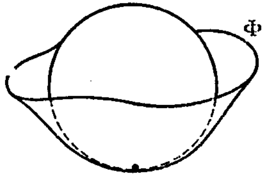


Рис. 66

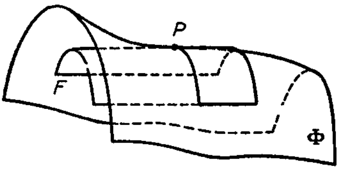


Рис. 67

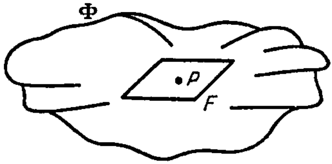
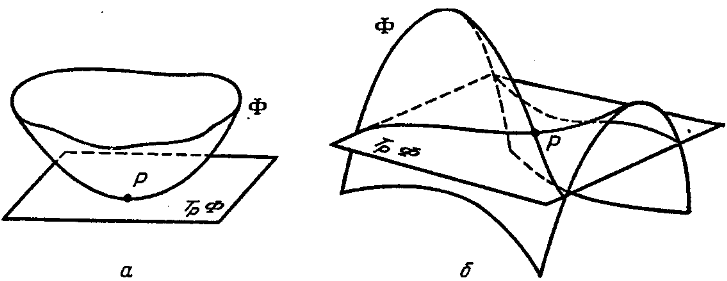


Рис. 68



а *б*

Рис. 69

Можно показать, что в окрестности точки эллиптического типа поверхность лежит по одну сторону от своей касательной плоскости (рис. 69, *а*), а в окрестности точки гиперболического типа поверхность пересекается с касательной плоскостью по двум кривым (рис. 69, *б*). В окрестности точки параболического типа ничего определенного про расположение поверхности относительно касательной плоскости заранее сказать нельзя.