§ 8. Главные кривизны и формула Эйлера

Пусть F — соприкасающийся параболоид поверхности Φ в точке P. Из аналитической геометрии известно, что поворотом осей уравнение параболоида F можно привести к виду

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Рассмотрим касательную прямую l, проходящую через точки P и (x_0, y_0). Нормальную кривизну поверхности Φ в точке P в направлении прямой l можно вычислить по формуле (см. § 6)

$$k_n = \frac{\mathrm{II}(x_0, y_0)}{\mathrm{I}(x_0, y_0)} = \frac{k_1 x_0^2 + k_2 y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = k_1 \frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + k_2 \frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}$$

Если обозначить через θ угол между осью x и прямой l, то формулу можно записать в виде (рис. 70):

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Из этой формулы следует, что если $k_1 < k_2$, то

$$k_1 = k_1 \cos^2\theta + k_1 \sin^2\theta \leqslant k_n(\theta) \leqslant k_2 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_2,$$

причем равенство в одном из неравенств может иметь место только в том случае, когда $\cos\theta = 0$ или $\sin\theta = 0$, т. е. когда прямая l совпадает с одной из координатных осей. Если же $k_1 = k_2$, то $k_n(\theta) \equiv k_1$.

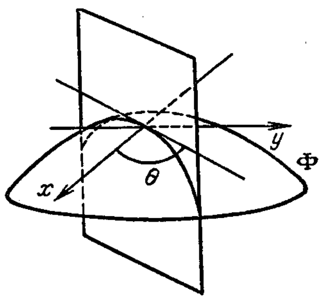


Рис. 70

Таким образом, мы доказали следующую теорему Эйлера.

Теорема 1 (Эйлер). *В каждой точке гладкой поверхности существуют две перпендикулярные касательные прямые l_1 и l_2, в направлении которых нормальная кривизна поверхности принимает наибольшее и наименьшее значения k_1 и k_2. Если l — произвольная касательная прямая, образующая угол θ с прямой l_1, то нормальная кривизна в направлении l вычисляется по формуле Эйлера*

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta. \quad \square$$

Наибольшую и наименьшую нормальные кривизны поверхности в точке P называют ее *главными кривизнами* в этой точке, а направления, в которых достигаются главные кривизны, называются *главными направлениями*. Как мы видели, если главные кривизны в точке P различны: $k_1 \neq k_2$, то главные направления определены однозначно и они перпендикулярны друг другу. Если же главные кривизны равны: $k_1 = k_2$, то любое направление будет главным.

Гауссова кривизна и средняя кривизна. Произведение главных кривизн k_1, k_2 обозначается через K и называется *гауссовой кривизной* поверхности в точке P:

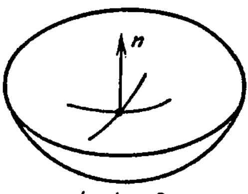
$$K = k_1 \cdot k_2.$$

В то время как сам соприкасающийся параболоид F определяется главными кривизнами k_1, k_2 и главными направлениями l_1, l_2, его *тип* полностью определяется *произведением* главных кривизн $k_1 k_2 = K$:

если $k_1 k_2 > 0$, то F — эллиптический параболоид;

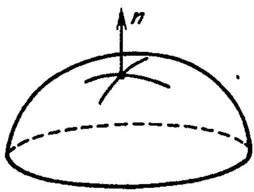
если $k_1 k_2 < 0$, то F — гиперболический параболоид;

если $k_1 k_2 = 0$, то F — параболический цилиндр или плоскость.



$k_1, k_2 > 0$

Рис. 71



$k_1, k_2 < 0$

Рис. 72

Таким образом, тип точки P на поверхности полностью определяется гауссовой кривизной K поверхности в этой точке:

если $K > 0$, *то* P — *точка эллиптического типа* (рис. 71, 72);

если $K < 0$, *то* P — *точка гиперболического типа* (рис. 73);

если $K = 0$, *то* P — *точка параболического типа* (рис. 74).

Полусумма главных кривизн k_1, k_2 обозначается через H и называется *средней кривизной* поверхности в точке P:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

(Из формулы Эйлера следует, что число H равняется нормальной кривизне в направлении биссектрисы угла, образованного главными направлениями.)

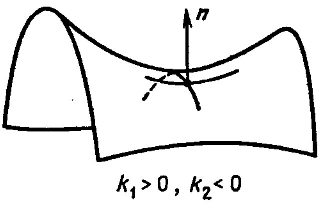


Рис. 73

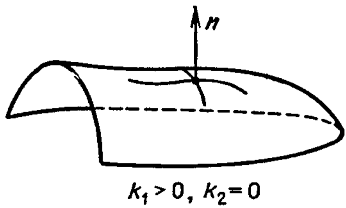


Рис. 74

Главные кривизны k_1, k_2 в точке P полностью определяются гауссовой кривизной K и средней кривизной H: по теореме Виета k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Заметим еще, что P является точкой округления тогда и только тогда, когда $H = K$, а точкой уплощения — тогда и только тогда, когда $H = K = 0$.

Наконец, отметим одно важное свойство главных направлений. Мы сформулируем его в том виде, в котором оно будет нами использоваться в § 11.

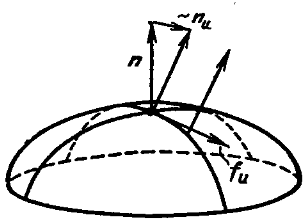


Рис. 75

Теорема 2 (Родриг). *Пусть $f(u, v)$ — параметризация гладкой поверхности Ф, и $P = f(u_0, v_0)$ — точка на поверхности. Если направления координатных линий в точке P являются главными, то выполняются равенства*

$$n_u(u_0, v_0) = -k_1 f_u(u_0, v_0),$$
$$n_v(u_0, v_0) = -k_2 f_v(u_0, v_0),$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны в точке P (рис. 75).

Доказательство. Нетрудно видеть, что справедливость доказываемых равенств зависит не от конкретного выбора системы внутренних координат u, v, а только от направлений координатных линий в точке P. Поэтому достаточно проверить доказываемые равенства непосредственно, воспользовавшись для этого, например, явным заданием поверхности

$$z = \varphi(x, y),$$

при котором

$$\varphi(0, 0) = \varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = \varphi_{xy}(0, 0) = 0,$$

а точка P имеет координаты 0, 0, 0. Соответствующая параметризация имеет вид $\boldsymbol{f}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{N}(u, v) = \boldsymbol{f}_u(u, v) \times \times \boldsymbol{f}_v(u, v)$. Тогда

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{N}(u, v)}{|\boldsymbol{N}(u, v)|},$$

$$\boldsymbol{n}_u(u, v) = \frac{\boldsymbol{N}_u(u, v) \cdot |\boldsymbol{N}(u, v)| - \boldsymbol{N}(u, v) \cdot \partial_u |\boldsymbol{N}(u, v)|}{|\boldsymbol{N}(u, v)|^2}.$$

Поскольку $\boldsymbol{f}_u(u, v) = (1, 0, \varphi_x(u, v))$, $\boldsymbol{f}_v(u, v) = (0, 1, \varphi_y(u, v))$, то нетрудно видеть, что

$$\boldsymbol{N}(u, v) = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1),$$

$$\boldsymbol{N}_u(u, v) = (-\varphi_{xx}, 0, 0),$$

$$|\boldsymbol{N}(u, v)| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1},$$

$$\partial_u |\boldsymbol{N}(u, v)| = \frac{\varphi_x \cdot \varphi_{xx} + \varphi_y \cdot \varphi_{yy}}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}},$$

где для краткости опущены аргументы u, v у функций φ_x, φ_y, φ_{xx}, φ_{yy}. Далее, ясно, что

$$\boldsymbol{N}(0, 0) = (0, 0, 1),$$

$$\boldsymbol{N}_u(0, 0) = (-k_1, 0, 0), \quad |\boldsymbol{N}(0, 0)| = 1,$$

и что функция $\partial_u(\boldsymbol{N}(u, v))$ в точке $(0, 0)$ обращается в нуль. Подставляя, получаем требуемое равенство:

$$\boldsymbol{n}_u(0, 0) = \frac{(-k_1, 0, 0) \cdot 1 - (0, 0, 1) \cdot 0}{1^2} = (-k_1, 0, 0) = -k_1 \cdot \boldsymbol{f}_u(0, 0).$$

Равенство $\boldsymbol{n}_v(0, 0) = -k_2 \boldsymbol{f}_v(0, 0)$ проверяется аналогично. □