§ 9. Нахождение главных направлений и главных кривизн

Пусть Φ — гладкая поверхность, заданная векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u, v)$, а $P=\boldsymbol{f}(u_0, v_0)$ — точка на ней. Рассмотрим в касательной плоскости $T_P\Phi$ аффинную систему координат ξ, η, в которой векторы $\boldsymbol{f}_u(0, 0)$ и $\boldsymbol{f}_v(0, 0)$ будут направляющими векторами осей ξ и η. В такой системе точка с радиус-вектором $\boldsymbol{f}(u_0, v_0)+\xi_0\boldsymbol{f}_u(0, 0)+\eta_0\boldsymbol{f}_v(0, 0)$ будет иметь координаты ξ_0, η_0. Будем рассматривать первую и вторую квадратичную формы как функции на плоскости $T_P\Phi$:

$$\mathrm{I}(\xi, \eta)=E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2,$$
$$\mathrm{II}(\xi, \eta)=L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2.$$

Тогда нормальная кривизна поверхности Φ в точке P в направлении прямой, проходящей через точку P и точку с координатами (ξ_0, η_0), вычисляется по формуле

$$k(\xi_0, \eta_0)=\frac{\mathrm{II}(\xi_0, \eta_0)}{\mathrm{I}(\xi_0, \eta_0)}.$$

Главные направления. Следовательно, весь вопрос о нахождении главных направлений сводится к нахождению точек максимума и минимума функции $k(\xi, \eta)$.

Пусть $k(\xi_0, \eta_0)$ — главная кривизна, причем $\eta_0\neq 0$. Положим $t_0=\frac{\xi_0}{\eta_0}$. Тогда

$$k(\xi_0, \eta_0)=\frac{\mathrm{II}(\xi_0, \eta_0)}{\mathrm{I}(\xi_0, \eta_0)}=\frac{Et_0^2+2Ft_0+G}{Lt_0^2+2Mt_0+N}.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_1(t)=Et^2+2Ft+G, \quad \varphi_2(t)=Lt^2+2Mt+N.$$

Тогда

$$k(\xi_0, \eta_0)=\frac{\varphi_2(t_0)}{\varphi_1(t_0)}.$$

Поскольку, по предположению, функция $\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$ достигает в точке t_0 максимума или минимума, то ее производная должна обращаться в этой точке в нуль.

Так как

$$\left(\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\right)' = \frac{\varphi_2'(t)\,\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t)}{\varphi_1^2(t)},$$

то, приравнивая числитель нулю, получаем

$$(2Lt + 2M)(Et^2 + 2Ft + G) - \\ - (2Et + 2F)(Lt^2 + 2Mt + N) = 0.$$

Сокращая на 2, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим окончательно

$$t_0^2(LF - ME) + t_0(LG - NE) + (MG - NF) = 0.$$

Если $\xi_0 \neq 0$, то мы можем положить $s_0 = \frac{\eta_0}{\xi_0}$ и рассмотреть функции

$$\psi_1(s) = E + 2Fs + Gs^2, \quad \psi_2(s) = L + 2Ms + Ns^2.$$

Тогда $k(\xi_0, \eta_0) = \frac{\psi_2(s_0)}{\psi_1(s_0)}$.

Так же как в случае функций φ_1 и φ_2, получаем, что s_0 является корнем уравнения $\psi_2'(s)\,\psi_1(s) - \psi_1'(s) \times \times \psi_2(s) = 0$. Подставляя вместо ψ_1, ψ_2, ψ_1', ψ_2' их выражения через s, деля на 2, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$(ME - LF) + s_0(NE - LG) + (NF - MG)\,s_0^2 = 0.$$

Если первое уравнение домножить на η_0^2 или второе домножить на $-\xi_0^2$, получится однородное уравнение относительно ξ_0 и η_0:

$$\xi_0^2(LF - ME) + \xi_0\eta_0(LG - NE) + \eta_0^2(MG - NF) = 0.$$

Его удобно записывать при помощи определителя:

$$\begin{vmatrix} -\eta_0^2 & \xi_0\eta_0 & -\xi_0^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, *решена задача отыскания главных направлений.*

Главные кривизны. Чтобы найти главные кривизны, можно было бы теперь решить одно из полученных уравнений, а затем найти кривизну по общей формуле. Мы поступим иначе.

Предположим, что мы хотим найти направление, в котором нормальная кривизна принимает данное значение k. Для этого нам надо было бы решить уравнение

$$\mathrm{II}(\xi, \eta) = \mathrm{I}(\xi, \eta)\, k,$$

или, что равносильно,

$$(L - kE)\,\xi^2 + 2(M - kF)\,\xi\eta + (N - kG)\,\eta^2 = 0.$$

Это уравнение можно рассматривать как квадратное, например, относительно ξ/η. Если k — главная кривизна, то у него есть единственное решение и, следовательно, дискриминант равен нулю:

$$(L - kE)(N - kG) - (M - kF)^2 = 0.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для нахождения главных кривизн k_1, k_2 в точке P:

$$(EG - F^2)\,k^2 + (2MF - EN - LG)\,k + (LN - M^2) = 0.$$

Кроме того, из этого уравнения, в силу формул Виета, получаем важное следствие — выражение гауссовой и средней кривизн через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности в данной точке:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}.$$