§ 10. Площадь поверхности

Дадим определение площади гладкой поверхности, исходя из того, что определение площади нам известно для замкнутых плоских областей, ограниченных конечным числом гладких кривых.

Пусть Φ — гладкая поверхность, заданная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v)$, где $(u, v) \in V \subset \mathbf{R}^2$. Возьмем в области V некоторую замкнутую область $\tilde{D}$, ограниченную конечным числом гладких кривых. Чтобы определить площадь ее образа — области $D = \boldsymbol{f}(\tilde{D})$ — поступим так. Разделим область $\tilde{D}$ на достаточно маленькие (по диаметру) замкнутые области $\tilde{D}_i$ при помощи кусочно гладких кривых. Соответственно и область D на поверхности разобьется на области D_i, ограниченные кусочно гладкими кривыми. В каждой области D_i выберем произвольную точку P_i. В ней проведем касательную плоскость $T_{P_i}\Phi$ и область D_i спроектируем на эту плоскость. Если размеры областей $\widetilde{D}_i$ достаточно малы, то при этом область D_i взаимно однозначно отобразится на некоторую *плоскую* область G_i, площадь которой нам известна. Кажется правдоподобным, что площадь $S(D_i)$ должна «мало отличаться» от площади $S(G_i)$, а площадь всей поверхности должна «мало отличаться» от суммы площадей всех областей G_i (рис. 76).

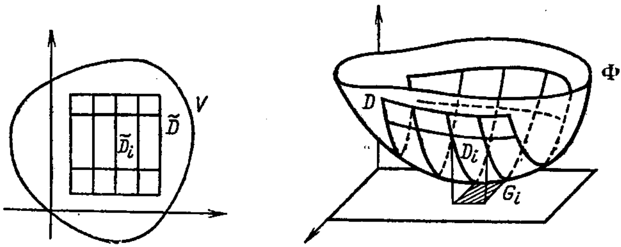

Рис. 76

Если при неограниченном уменьшении (по диаметру) областей D_i сумма площадей областей G_i будет стремиться к некоторому пределу, то этот предел называется *площадью* области D:

$$S(D) = \lim_{\max d(D_i)\to 0}\left(\sum_i S(G_i)\right).$$

Теорема. *Всякая замкнутая и ограниченная область D с кусочно гладкой границей на поверхности Φ имеет определенную площадь. Эту площадь можно вычислить по формуле*

$$S(D) = \iint\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Доказательство. В силу аддитивности левой и правой частей доказываемого равенства достаточно ограничиться случаем, когда область D настолько мала, что, например, допускает явное задание

$$z = \varphi(x, y),$$

где φ — гладкая функция, заданная в области G. Тогда, как известно из анализа, площадь области D можно найти по формуле

$$S(D) = \iint_G \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}\, dx\, dy.$$

Пусть переход от явного задания $z = \varphi(x, y)$ к параметрическому $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v)$ осуществляется при помощи замены переменных

$$x = \xi(u, v), \qquad y = \eta(u, v).$$

Тогда, воспользовавшись формулой замены переменных под знаком двойного интеграла, мы получаем:

$$S(D) = \iint_G \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{1 + \varphi_x^2(\xi, \eta) + \varphi_y^2(\xi, \eta)}\, J\, du\, dv,$$

где $J = J(u, v) = \begin{vmatrix} \xi_u(u, v) & \eta_u(u, v) \\ \xi_v(u, v) & \eta_v(u, v) \end{vmatrix}$ — якобиан замены. Поскольку, очевидно,

$$\boldsymbol{f}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v), \varphi(\xi(u, v), \eta(u, v))),$$

то

$$\boldsymbol{f}_u(u, v) = (\xi_u, \eta_u, \varphi_x\xi_u + \varphi_y\eta_u),$$
$$\boldsymbol{f}_v(u, v) = (\xi_v, \eta_v, \varphi_x\xi_v + \varphi_y\eta_v),$$

и, как нетрудно проверить,

$$\boldsymbol{f}_u \times \boldsymbol{f}_v = J \cdot (-\varphi_x, -\varphi_y, 1).$$

Отсюда $\sqrt{EG - F^2} = |\boldsymbol{f}_u \times \boldsymbol{f}_v| = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}\, |J|$, т. е. наш интеграл совпадает с указанным в формулировке теоремы. □