§ 11. Сферическое отображение поверхности

Для изучения искривленности поверхностей очень полезным оказывается некоторое их отображение в единичную сферу, которое мы сейчас опишем.

Пусть Ф — гладкая поверхность, P — произвольная ее точка. Пусть n — единичный вектор нормали к поверхности в точке P. Отложим вектор n из начала координат. Тогда его конец определит некоторую точку $\Gamma(P)$ единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Построенное отображение Г поверхности Ф в единичную сферу S^2 называется *сферическим* или *гауссовым отображением* (рис. 77):

$$\Gamma\colon \Phi \to S^2.$$

(Стоит отметить, что при сферическом отображении касательная плоскость к поверхности в точке P параллельна касательной плоскости к сфере в точке $\Gamma(P)$.) Образы точек и множеств при сферическом отображении называются их *сферическими изображениями* (рис. 78).

Примеры. 1. Если Ф — область на сфере S^2, то ее сферическое отображение есть тождественное, а сферическое изображение совпадает с Ф.

2. Сферическое изображение любой образующей на цилиндрической поверхности есть точка, а сферическое изображение всей поверхности есть некоторая дуга большого круга на сфере.

3. Сферическое отображение плоской области есть постоянное отображение, а ее сферическое изображение есть точка (рис. 79).

4. Сферическое изображение эллиптического или гиперболического параболоида есть открытая полусфера (рис. 80).

Из теоремы об обратной функции и теоремы Родрига нетрудно вывести, что если P — точка эллиптического или гиперболического типа, то в достаточно малой окрестности точки P сферическое отображение взаимно однозначно. Это означает, что в такой окрестности не найдется двух точек, нормали к поверхности в которых были бы друг другу параллельны.

При помощи сферического отображения можно дать геометрическую интерпретацию гауссовой кривизны.

Теорема. *Пусть U — малая окрестность точки P на поверхности Ф. Тогда при стремлении диаметра области U к нулю (другими словами, при стягивании ее к точке P) отношение площади ее сферического изображения $\Gamma(U)$ к площади самой окрестности U стремится к абсолютной величине гауссовой кривизны*

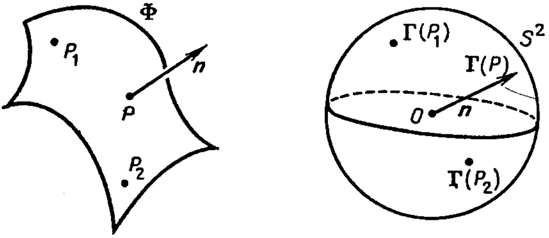

Рис. 77

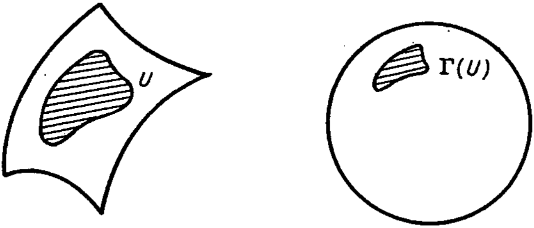

Рис. 78

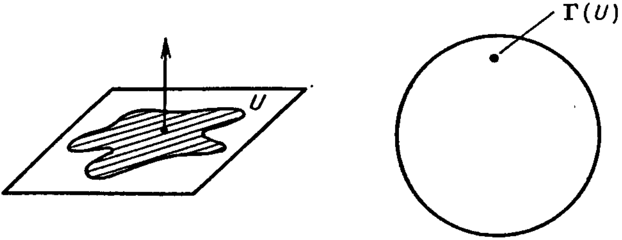

Рис. 79

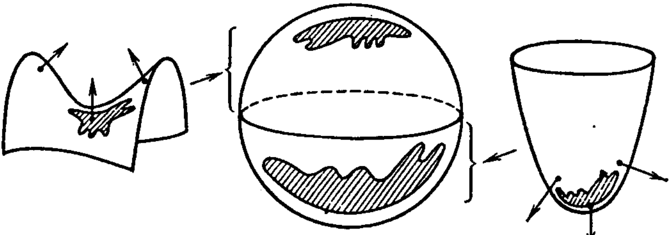

Рис. 80

поверхности Φ *в точке* P:

$$\lim_{d(U)\to 0} \frac{S(\Gamma(U))}{S(U)} = |K(P)|.$$

Доказательство. Мы ограничимся случаем, когда точка P принадлежит к эллиптическому или гиперболическому типу. В этом случае отображение Γ взаимно однозначно на U и имеет место равенство

$$S(\Gamma(U)) = \iint_W |\boldsymbol{n}_u(u, v) \times \boldsymbol{n}_v(u, v)|\, du\, dv,$$

где W — координатная окрестность, соответствующая окрестности U: $W = \boldsymbol{f}^{-1}(U)$ (где $\boldsymbol{f}$ параметризует Φ). С другой стороны, всегда

$$S(U) = \iint_W |\boldsymbol{f}_u(u, v) \times \boldsymbol{f}_v(u, v)|\, du\, dv.$$

По теореме о среднем значении получаем

$$S(\Gamma(U)) = \iint_W |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|\, du\, dv = \\ = |\boldsymbol{n}_u(u', v') \times \boldsymbol{n}_v(u', v')| \cdot S(W),$$

$$S(U) = \iint_W |\boldsymbol{f}_u \times \boldsymbol{f}_v|\, du\, dv = \\ = |\boldsymbol{f}_u(u'', v'') \times \boldsymbol{f}_v(u'', v'')| \cdot S(W),$$

где $(u', v') \in W$, $(u'', v'') \in W$ — некоторые точки. При стягивании области U к точке P эти точки стремятся к (u_0, v_0). Поэтому

$$\lim_{d(U)\to 0} \frac{S(\Gamma(U))}{S(U)} = \lim_{\substack{(u', v')\to(u_0, v_0)\\ (u'', v'')\to(u_0, v_0)}} \frac{|\boldsymbol{n}_u(u', v') \times \boldsymbol{n}_v(u', v')|}{|\boldsymbol{f}_u(u'', v'') \times \boldsymbol{f}_v(u'', v'')|} = \\ = \frac{|\boldsymbol{n}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{n}_v(u_0, v_0)|}{|\boldsymbol{f}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{f}_v(u_0, v_0)|}.$$

Значение полученного выражения проще всего подсчитать, воспользовавшись теоремой Родрига. Если внутренние координаты выбраны так, что координатные линии проходят через точку P в главных направлениях, то

$$\boldsymbol{n}_u(u_0, v_0) = -k_1 \boldsymbol{f}_u(u_0, v_0), \quad \boldsymbol{n}_v(u_0, v_0) = -k_2 \boldsymbol{f}_v(u_0, v_0),$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны в точке P. Поэтому

$$\frac{|\boldsymbol{n}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{n}_v(u_0, v_0)|}{|\boldsymbol{f}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{f}_v(u_0, v_0)|} = |k_1 \cdot k_2| = |K(P)|,$$

что и требовалось доказать. □