§ 12. Внутренняя геометрия поверхности

Определение. Пусть даны две поверхности — Φ и $\tilde{\Phi}$. Предположим, что задано непрерывное биективное отображение $i\colon \Phi \to \tilde{\Phi}$ одной из них в другую. Такое отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками обеих поверхностей. При этом соответствии каждой кривой C на поверхности Φ отвечает некоторая кривая $\tilde{C}$ на поверхности $\tilde{\Phi}$, и наоборот:

$$\tilde{C} = i(C), \quad C = i^{-1}(\tilde{C}).$$

Если при этом длина каждой кривой C равна длине соответствующей кривой $\tilde{C}$, то говорят, что $\tilde{\Phi}$ получается из Φ при помощи изгибания, а само отображение i называется *изгибанием* или *изометрией* (рис. 81, 82).

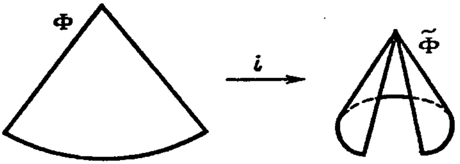

Рис. 81

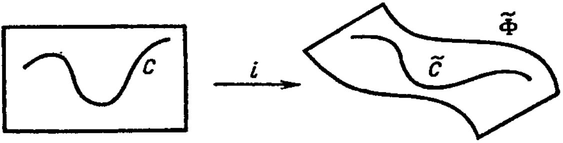

Рис. 82

Внутренняя геометрия поверхности изучает те свойства поверхностей и фигур на них, которые не меняются при изгибаниях. С этой точки зрения вся планиметрия представляет собой внутреннюю геометрию плоскости. Это вполне согласуется с тем обычным представлением, что в планиметрии изучаются свойства фигур, не меняющиеся при изометриях плоскости, т. е. наложениях.

Главным для нас будет следующий пример изгибания. Пусть поверхности Φ и $\tilde{\Phi}$ параметризуются вектор-функциями $f(u, v)$ и $\tilde{f}(u, v)$, заданными в одной и той же области V, и пусть отображение i ставит в соответствие точке P на поверхности Φ точку $\tilde{P}$

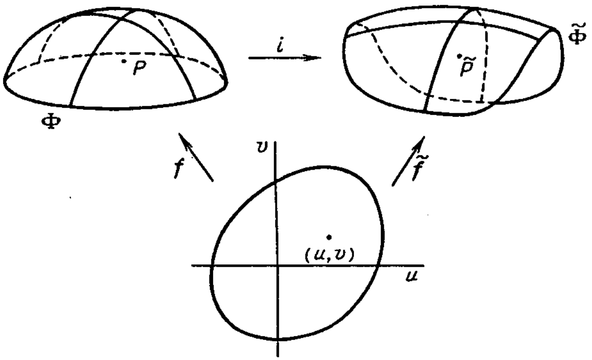

Рис. 83

на поверхности $\tilde{\Phi}$, имеющую такие же внутренние координаты (рис. 83):

$$i(f(u, v)) = \tilde{f}(u, v).$$

Если при этом в соответствующих точках будут совпадать коэффициенты первой квадратичной формы поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$:

$$E(u, v) \equiv \tilde{E}(u, v), \qquad F(u, v) \equiv \tilde{F}(u, v),$$
$$G(u, v) \equiv \tilde{G}(u, v),$$

то, как это следует из формулы длины кривой на поверхности, отображение i будет изгибанием. Обратное утверждение тоже верно. Его доказательство мы оставляем читателю в виде упражнения.

Таким образом, можно сказать, что к внутренней геометрии относятся те свойства и величины, которые могут быть охарактеризованы или вычислены в терминах первой квадратичной формы поверхности. Помимо длин кривых, это углы между кривыми и площади фигур на поверхности.

В следующем параграфе мы докажем, что к внутренней геометрии относится и такая важнейшая характеристика поверхности, как ее гауссова кривизна. Затем мы изучим еще некоторые объекты внутренней геометрии.

Замечание. Точно так же, как наложение (первого рода) плоскости является результатом *перемещения*, изометрию поверхности часто можно представить в виде результата некоторого процесса. Для более точной формулировки введем понятие *непрерывного изгибания*. Пусть поверхности Φ и $\tilde{\Phi}$ обладают параметризациями $f(u, v)$ и $\tilde{f}(u, v)$, заданными в одной и той же области V. Пусть задана гладкая вектор-функция трех переменных $\boldsymbol{F}(t, u, v)$, определенная при $t \in [0, 1]$ и $(u, v) \in V$. Пусть для каждого $t_0 \in [0, 1]$ отображение $\boldsymbol{F}(t_0, u, v)\colon V \to \mathbf{R}^3$ является

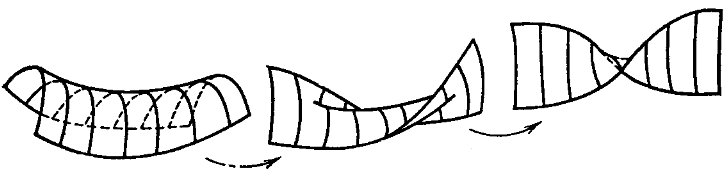

Рис. 84

регулярной параметризацией некоторой гладкой поверхности Φ_{t_0}, причем $\boldsymbol{F}(0, u, v) \equiv f(u, v)$ и $\boldsymbol{F}(1, u, v) \equiv \equiv \tilde{f}(u, v)$. (В частности, $\Phi_0 = \Phi$, $\Phi_1 = \tilde{\Phi}$.) Если при этом для любого $t_0 \in [0, 1]$ отображение поверхности Φ в поверхность Φ_{t_0}, заданное формулой

$$f(u, v) \longmapsto \boldsymbol{F}(t_0, u, v),$$

является изгибанием, то говорят, что $\boldsymbol{F}$ задает *непрерывное изгибание* поверхности Φ в поверхность $\tilde{\Phi}$. Из определения видно, что в этом случае отображение i поверхности Φ в $\tilde{\Phi}$, заданное формулой

$$i(f(u, v)) = \boldsymbol{F}(1, u, v) = \tilde{f}(u, v),$$

является изгибанием (рис. 84).