§ 13. Формула для гауссовой кривизны и следствия из нее. Основные уравнения теории поверхностей

В этом параграфе мы выведем замечательную формулу Гаусса, которая выражает гауссову кривизну поверхности только через коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности и их частные производные первого и второго порядка.

Уже из самого факта существования такой формулы можно сделать несколько очень важных выводов. Первый вывод — инвариантность гауссовой кривизны относительно изгибаний.

Теорема Гаусса (theorema egregium[1]). *Если одна гладкая поверхность получается из другой при помощи изгибания, то гауссовы кривизны этих поверхностей в соответственных точках совпадают. Другими словами, гауссова кривизна поверхности не меняется при изгибании.* □

Таким образом, гауссова кривизна относится к внутренней геометрии поверхностей. Как мы знаем, тип точки на поверхности определяется гауссовой кривизной поверхности в этой точке. Поэтому точку, например, эллиптического типа нельзя превратить изгибанием в точку гиперболического или параболического типа (рис. 85—87).

Другой вывод касается сферического отображения поверхности. Ясно, что при изгибании сферические изображения всей поверхности и различных фигур на ней могут меняться. Однако *площадь* сферического изображения фигуры при изгибании не меняется. Это следует из того обстоятельства, что площадь сферического изображения области Ω на поверхности совпадает с абсолютной величиной ее полной кривизны, которая выражается интегралом $\iint\limits_{\Omega} K\,dS$, ср. § 11. А указанный интеграл, в силу теоремы Гаусса, при изгибании не изменяется (рис. 88). (Чтобы эти рассуждения имели силу, необходимо предположить, что сферическое отображение является взаимно однозначным в области Ω и той области $\tilde{\Omega}$, которая соответствует ей при изгибании.)

---

[1]) egregium (лат.) — славная, отличная, превосходная.

Рис. 85

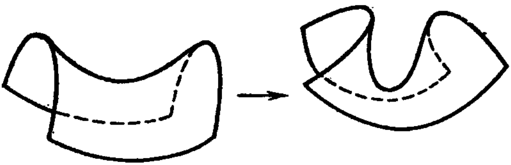

Рис. 86

Рис. 87

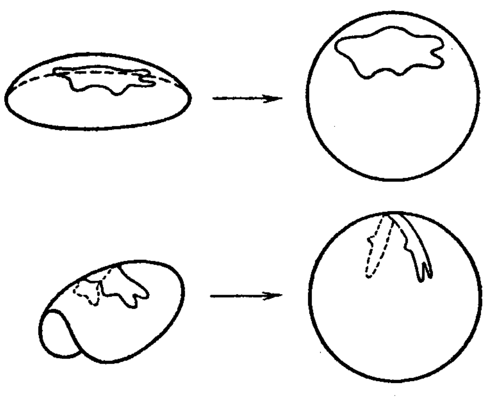

Рис. 88

Формула Гаусса. Перейдем к выводу формулы Гаусса. Пусть гладкая поверхность Φ задана параметрическим уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u, v)$. Тогда ее гауссова кривизна в точке $P=\boldsymbol{f}(u, v)$, как было показано в § 9, вычисляется по формуле

$$K(u,\ v)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

(Напомним, что коэффициенты E, F, G, L, M, N первой и второй квадратичной форм являются *функциями* от переменных u, v.) Как мы знаем, для коэффициентов L, M, N имеются формулы

$$L=\frac{(\boldsymbol{f}_{uu}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad M=\frac{(\boldsymbol{f}_{uv}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad N=\frac{(\boldsymbol{f}_{vv}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Отсюда получаем формулу для гауссовой кривизны в точке P:

$$K(u,\ v)=\frac{(\boldsymbol{f}_{uu}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)(\boldsymbol{f}_{vv}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)-(\boldsymbol{f}_{uv}, \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v)^2}{(EG-F^2)^2}.$$

Чтобы преобразовать числитель к удобному для нас виду, воспользуемся следующей простой леммой из векторной алгебры.

Лемма. *Пусть даны векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}' \in \mathbf{R}^3$. *Тогда имеет место равенство, связывающее их скалярные и смешанные произведения*:

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{c}')=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}') \\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}') \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}') \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Проверим эту формулу в координатах. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты a_1, a_2, a_3, вектор $\boldsymbol{a}'$ имеет координаты a_1', a_2', a_3' и т. д. Тогда требуемое равенство получается в результате несложных преобразований

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{c}')=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}') \\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}') \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}') & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}') & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}') \end{vmatrix}.$$

Лемма доказана. □

Применяя лемму к выражениям $(\mathbf{f}_{uu}, \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v)(\mathbf{f}_{vv}, \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v)$ и $(\mathbf{f}_{uv}, \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v)^2$, получаем такую довольно громоздкую формулу для гауссовой кривизны:

$$K(u,\ v)=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_{vv}) & (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{vv}) & (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{vv}) & (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_v) \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} (\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_{uv}) & (\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{uv}) & (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{uv}) & (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_v) \end{vmatrix}\right\}.$$

Пользуясь тем, что алгебраические дополнения левых верхних элементов выписанных определителей совпадают, и тем, что $\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_u = E$, $\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_v = F$, $\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_v = G$, получим окончательно

$$K(u,\ v)=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_{vv}-\mathbf{f}_{uv}^2) & (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{vv}) & E & F \\ (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & (\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_u) & (\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_v) \\ (\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{uv}) & E & F \\ (\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{uv}) & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Для того чтобы получить выражение гауссовой кривизны, включающее только функции E, F, G и их частные производные, достаточно выразить функции $\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_u$, $\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{uv}$, $\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_v$, $\mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{vv}$, $\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_v$, $\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{vv}$ и $\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_{vv}-\mathbf{f}_{uv}^2$ через частные производные функций E, F, G. Начнем с того, что, продифференцировав по u и по v соотношения

$$\mathbf{f}_u^2 = E,\qquad \mathbf{f}_v^2 = G,\qquad \mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_v = F,$$

получим следующие тождества:

$$\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_u=\frac{1}{2}E_u,\qquad \mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{uv}=\frac{1}{2}E_v,$$

$$\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_v=\frac{1}{2}G_u,\qquad \mathbf{f}_v\cdot\mathbf{f}_{vv}=\frac{1}{2}G_v,$$

$$\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_v+\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{uv}=F_u,\qquad \mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{vv}+\mathbf{f}_{uv}\cdot\mathbf{f}_v=F_v.$$

Вычитая из последних двух равенств соответственно второе и третье равенства, получим:

$$\mathbf{f}_{uu}\cdot\mathbf{f}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v,\qquad \mathbf{f}_u\cdot\mathbf{f}_{vv}=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

Далее, поскольку

$$(f_{uu}\cdot f_v)_v = f_{uuv}\cdot f_v + f_{uu}\cdot f_{vv}, \quad (f_{uv}\cdot f_v)_u = f_{uuv}\cdot f_v + f_{uv}^2,$$

то

$$f_{uu}\cdot f_{vv} - f_{uv}^2 = (f_{uu}\cdot f_v)_v - (f_{uv}\cdot f_v)_u = \\ = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Подставляя все эти выражения в полученную нами ранее формулу для гауссовой кривизны, мы приходим наконец к формуле Гаусса:

$$K(u, v) = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\times \\ \times\left\{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu}) & \frac{1}{2}E_u & \left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right) \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Основные уравнения теории поверхностей. Еще одно важное следствие из формулы Гаусса состоит в том, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности не являются независимыми. Как мы видели, формула Гаусса позволяет выразить функцию $LN - M^2$ через функции E, F, G и их частные производные. Напрашивается вопрос: существуют ли еще какие-нибудь зависимости между коэффициентами первой и второй квадратичных форм? Ответ на этот вопрос положительный. Имеются две формулы Петерсона — Майнарди — Кодацци, выражающие линейные комбинации частных производных функций L, M, N через сами эти функции и через функции E, F, G и их частные производные:

$$L_v - M_u = \varphi(L, M, N; E, \ldots, G_v),$$
$$M_v - N_u = \psi(L, M, N; E, \ldots, G_v).$$

Других зависимостей между E, F, G, L, M, N нет.

Оказывается, что если в плоской области V заданы шесть функций L, M, N, E, F, G, для которых выполняются уравнения Петерсона — Майнарди — Кодацци, функция $LN-M^2$ удовлетворяет уравнению Гаусса и функции E, $EG-F^2$ всюду положительны, то указанные шесть функций являются коэффициентами первой и второй квадратичных форм некоторой гладкой поверхности, определенной ими однозначно с точностью до положения в пространстве. Это теорема Боннэ.