§ 14. Геодезическая кривизна и геодезические кривые

Определение. Пусть C — кривая на гладкой поверхности Ф, а $\boldsymbol{k}$ — вектор кривизны в точке P этой кривой. Вектор $\boldsymbol{k}$ раскладывается в сумму двух векторов $\boldsymbol{k}_g$ и $\boldsymbol{k}_n$, первый из которых лежит в касательной плоскости $T_P\Phi$, а второй ей перпендикулярен. Как мы знаем, длина вектора $\boldsymbol{k}_n$ равна абсолютной величине нормальной кривизны кривой C в точке P:

$$|\boldsymbol{k}_n| = |k_n|.$$

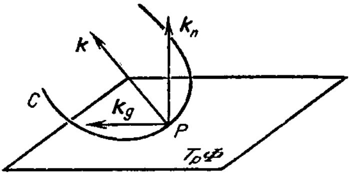

Рис. 89

Длина вектора $\boldsymbol{k}_g$ называется *геодезической кривизной (без знака)* кривой C в точке P и обозначается через k_g:

$$|\boldsymbol{k}_g| = k_g.$$

В силу перпендикулярности векторов $\boldsymbol{k}_g$ и $\boldsymbol{k}_n$ имеем:

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2,$$

где $k = |\boldsymbol{k}|$ — кривизна кривой C в точке P (рис. 89).

В качестве упражнения предлагаем читателю доказать, что геодезическая кривизна кривой C в точке P равна кривизне проекции этой кривой на касательную плоскость $T_P\Phi$. В частности, на плоскости геодезическая кривизна всякой кривой в каждой точке совпадает с ее кривизной (рис. 90).

Если кривая C параметризована вектор-функцией $\varphi(t)$, причем $P=\varphi(t_0)$, то, как нетрудно видеть, ее геодезическая кривизна в точке P может быть вычислена по формуле

$$k_g = \frac{|(\varphi''(t_0),\ \varphi'(t_0),\ n)|}{|\varphi'(t_0)|^3},$$

где n — вектор нормали к поверхности в точке P.

Геодезические кривые. Оказывается, что геодезическая кривизна относится к внутренней геометрии. (Мы оставим этот факт без доказательства.) Ввиду

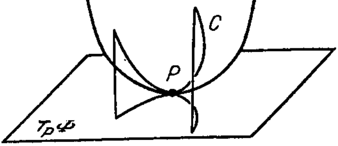

Рис. 90

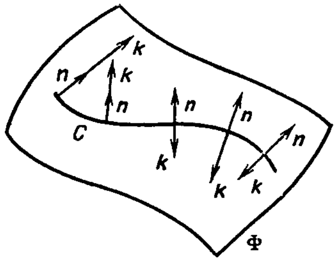

Рис. 91

этого особый интерес представляют кривые на поверхности, геодезическая кривизна которых в каждой точке равна нулю. Такие кривые называются ***геодезическими***. Они являются аналогами отрезков прямых на плоскости, кривизна которых в каждой точке равна нулю.

Из-за важности геодезических для внутренней геометрии укажем несколько их свойств, каждое из которых может быть взято за определение. Если кривая C является геодезической, то:

а) вектор главной нормали кривой C в каждой точке совпадает с вектором нормали к поверхности (с точностью до знака) (рис. 91);

б) соприкасающаяся плоскость в каждой точке кривой C проходит через нормаль к поверхности;

в) спрямляющая плоскость кривой C в каждой точке совпадает с касательной плоскостью к поверхности;

г) кривая C в каждой точке имеет наименьшую кривизну среди всех кривых, проходящих через эту же точку в том же направлении (т. е. она является «наипрямейшей» среди этих кривых);

д) если $\varphi(t)$ — параметризация кривой C, то $(\varphi''(t), \varphi'(t), \boldsymbol{n}) \equiv 0$.

Как известно, через каждые две точки на плоскости проходит единственная прямая. Для геодезических на поверхности это свойство, вообще говоря, может не выполняться. Две точки могут соединяться двумя, тремя, даже бесконечным числом геодезических, а могут и не соединяться ни одной. Однако выполнено другое, родственное свойство, а именно:

Теорема. *Через каждую точку в каждом направлении проходит единственная геодезическая.* (Поскольку любая дуга геодезической сама есть геодезическая, то единственность требует пояснений. Под единственностью мы имеем в виду то, что любые две достаточно короткие геодезические, проходящие через одну и ту же точку в одном и том же направлении, являются дугами одной и той же большей геодезической, рис. 92.)

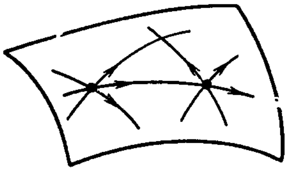

Рис. 92

Чтобы доказать это, составим дифференциальное уравнение геодезической. Пусть $\boldsymbol{f}(u, v)$ — параметризация поверхности Ф. Будем искать внутренние уравнения геодезической в виде $u = t$, $v = \psi(t)$. Тогда параметризация геодезической будет иметь вид

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t) = \boldsymbol{f}(t, \psi(t)).$$

Далее, по обычным формулам,

$$\varphi'(t) = \boldsymbol{f}_u(t, \psi(t)) + \boldsymbol{f}_v(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t),$$

$$\varphi''(t) = \boldsymbol{f}_{uu}(t, \psi(t)) + 2\boldsymbol{f}_{uv}(t, \psi(t))\,\psi'(t) + \\ + \boldsymbol{f}_{vv}(t, \psi(t))\,\psi'^2(t) + \boldsymbol{f}_v(t, \psi(t))\,\psi''(t).$$

Для краткости опуская аргументы t и $\psi(t)$ у функций, можно записать:

$$(\varphi'', \varphi', \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{f}_{uu} + 2\boldsymbol{f}_{uv}\psi' + \boldsymbol{f}_{vv}\psi'^2 + \boldsymbol{f}_v\psi'', \boldsymbol{f}_u + \boldsymbol{f}_v\psi', \boldsymbol{n}) = \\ = (\boldsymbol{f}_{uu} + 2\boldsymbol{f}_{uv}\psi' + \boldsymbol{f}_{vv}\psi'^2, \boldsymbol{f}_u + \boldsymbol{f}_v\psi', \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{f}_v\psi'', \boldsymbol{f}_u + \boldsymbol{f}_v\psi', \boldsymbol{n}).$$

Последнее слагаемое равняется $-\psi''\cdot(f_u, f_v, n)$. Таким образом, равенство $(\varphi'', \varphi', n)=0$ равносильно такому равенству:

$$\psi''=\frac{(f_{uu}+2f_{uv}\psi'+f_{vv}\psi'^2,\ f_u+f_v\psi',\ n)}{(f_u,\ f_v,\ n)}.$$

Это равенство можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\psi(t)$. Теперь из теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку в любом направлении проходит единственная геодезическая (если интересующее нас направление совпадает с направлением вектора f_v, то мы можем поменять ролями координаты u и v). □

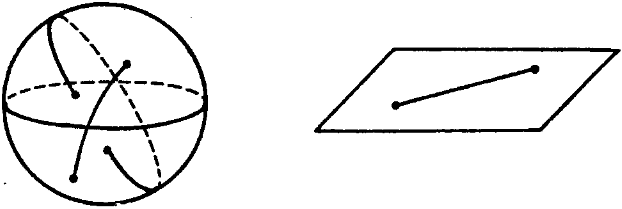

Рис. 93

Прямые на плоскости, очевидно, являются геодезическими. Нетрудно убедиться, что на цилиндре геодезическими являются окружности, винтовые линии и прямые, а на сфере геодезическими являются окружности больших кругов. Поскольку через каждую точку этих поверхностей в каждом направлении проходит линия одного из указанных типов, то *других геодезических на плоскости, цилиндре и сфере нет* (рис. 93).