§ 15. Полугеодезическая параметризация поверхности. Экстремальное свойство геодезических

Определение. Параметризация $f(u, v)$ гладкой поверхности Ф называется *полугеодезической*, если все координатные линии одного семейства являются геодезическими и в каждой точке поверхности координатные линии ортогональны (рис. 94).

Способ построения полугеодезической параметризации усматривается из определения. Пусть L — произвольная гладкая кривая на поверхности Ф, а $\varphi(t)$ — ее регулярная (дважды дифференцируемая) параметризация. Через каждую точку $P = \varphi(t)$ кривой L проходит вполне определенная геодезическая C_t, ортогональная кривой L (рис. 95). Будем считать ее

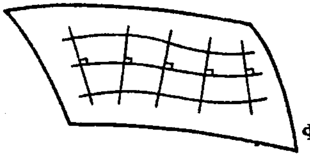

Рис. 94

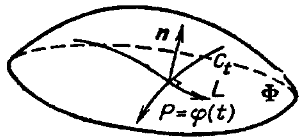

Рис. 95

ориентированной таким образом, что в точке P касательные векторы кривых C_t и L образуют с вектором нормали к Ф правую тройку. Введем на кривой C_t естественную параметризацию $\psi_{(t)}$, в которой $\psi_{(t)}(0) = \varphi(t)$. Теперь мы можем рассмотреть вектор-функцию $g(s, t)$, определенную в некоторой окрестности W отрезка $[a, b]$ в плоскости st по формуле

$$g(s, t) = \psi_{(t)}(s).$$

Из теоремы о зависимости решений дифференциального уравнения от коэффициентов и начальных данных следует, что $g(s, t)$ — гладкая вектор-функция, а из теоремы об обратном отображении следует, что

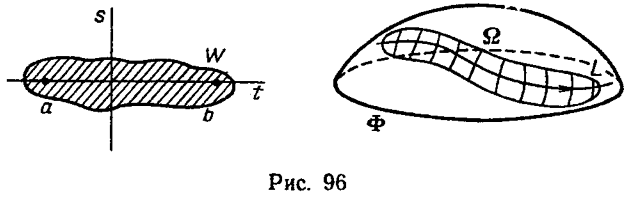

Рис. 96

g: $W \to \mathbb{R}^3$ есть регулярная параметризация некоторой окрестности Ω кривой L в поверхности Ф. Тем самым мы построили в окрестности кривой L систему внутренних координат s, t, в которой сама кривая L будет задаваться уравнением $s = 0$, а геодезическая C_{t_0} — уравнением $t = t_0$ (рис. 96).

Чтобы убедиться в том, что $g(s, t)$ есть полугеодезическая параметризация, осталось проверить ортогональность координатных линий в каждой точке, т. е. равенство $F \equiv 0$. Так как любая кривая C_{t_0} — геодезическая, то вектор $\psi''_{(t_0)}(s)$ всюду направлен по нормали к поверхности. Но, очевидно, $g_{ss}(s, t_0) = \psi''_{(t_0)}(s)$. Поэтому $g_{ss} \cdot g_t \equiv 0$. Как мы знаем (см. § 13), $g_{ss} \cdot g_t = F_s - E_t/2$. Но при любом t_0

$$E(s, t_0) = g_s^2(s, t_0) = [\psi'_{(t_0)}(s)]^2 \equiv 1$$

в силу естественности параметризации $\psi_{(t_0)}$; поэтому $E_t \equiv 0$ и $F_s = g_{ss} \cdot g_t + E_t/2 \equiv 0$. С другой стороны, по построению, $F(0, t) \equiv 0$. Поэтому $F(s, t) \equiv 0$, и, следовательно, построенная параметризация $g(s, t)$ действительно полугеодезическая. □

Еще раз отметим, что в построенной параметризации $E \equiv 1$, $F \equiv 0$. Как нетрудно убедиться, всякая параметризация, удовлетворяющая этому условию, заведомо является полугеодезической.

Теорема. *Дуга геодезической кривой C между точками A и B будет кратчайшей среди всех кривых, лежащих на поверхности, с концами в этих точках, если точки A и B достаточно близки.*

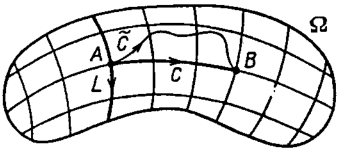

Рис. 97

Доказательство. Применим описанную выше конструкцию к случаю, когда кривая L ортогональна геодезической C в точке A. Мы получим в (возможно, очень маленькой) окрестности Ω точки A полугеодезическую параметризацию, которой соответствует система внутренних координат s, t. В этой системе кривая L будет задаваться уравнением $s = 0$. Если точка A имеет координаты $(0, t_0)$, то кривая C будет задаваться уравнением $t = t_0$. Пусть точка B имеет координаты $(0, s_0)$ (рис. 97).

Рассмотрим любую другую кривую $\tilde{C}$ с концами в A и B. Для простоты предположим, что $\tilde{C}$ — гладкая кривая, целиком лежащая в окрестности Ω. Пусть $u = \varphi_1(\tau)$, $v = \varphi_2(\tau)$ — ее внутренние уравнения, где $\tau \in [\alpha, \beta]$. При этом, очевидно, $\varphi_1(\alpha) = 0$,

$\varphi_1(\beta) = s_0$. Если $S(\tilde{C})$ и $S(C)$ — длины кривых $\tilde{C}$ и C, то мы получаем неравенство:

$$S(\tilde{C}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi_1'(\tau)]^2 + G\cdot[\varphi_2'(\tau)]^2}\, d\tau \geqslant \int_\alpha^\beta |\varphi_1'(\tau)|\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left|\int_\alpha^\beta \varphi_1'(\tau)\, d\tau\right| = |\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)| = |s_0| = S(C).$$

Ясно, что $S(\tilde{C}) = S(C)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_2(\tau) \equiv 0$, $\varphi_1'(\tau) > 0$, т. е. $\tilde{C} = C$. Теорема доказана. □

Заключительные замечания: поверхности постоянной гауссовой кривизны. Пользуясь полугеодезической параметризацией и формулой Гаусса, можно доказать, что если у двух поверхностей в каждой точке гауссова кривизна равна одному и тому же числу $K \geqslant 0$, то эти поверхности *локально изометричны*: любой достаточно малый участок первой поверхности изометричен некоторому участку второй, и наоборот. Поэтому на поверхностях постоянной гауссовой кривизны $K \geqslant 0$ «в малом» выполняется сферическая геометрия (при $K > 0$) или планиметрия (при $K = 0$). При $K < 0$ на поверхности реализуется «в малом» геометрия Лобачевского, подробно излагаемая в последней главе учебника. С виду эти три геометрии совершенно различны, что проявляется, например, в поведении суммы углов треугольника. Если на евклидовой плоскости она равна π, то на сфере всегда больше, а на плоскости Лобачевского всегда меньше π, причем в обоих случаях отличие от π прямо пропорционально площади треугольника. Объяснение этому дает теорема Гаусса — Боннэ. Она утверждает, что если α, β, γ — внутренние углы треугольной области Δ, ограниченной на гладкой поверхности тремя геодезическими, то

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_\Delta K\,dS.$$

Для поверхности постоянной гауссовой кривизны второе слагаемое в правой части равно произведению гауссовой кривизны на площадь треугольника Δ. Приведенную формулу легко обобщить на случай геодезического многоугольника.