§ 32. Модель "хищник-жертва" (*модель Вольтерра*)

Среди допущений, введенных в модели I, снимем допущение 4. Пусть в некотором пространстве живут два вида особей: зайцы (жертвы) и рыси (хищники). Зайцы питаются растительной пищей, имеющейся всегда в достаточном количестве (между ними отсутствует внутривидовая борьба). Рыси могут питаться только зайцами.

Введем величины:

x – число жертв в момент t;

y – число хищников в момент t.

Уравнения баланса между численностью рожденных и гибнущих особей:

Жертвы:

$$\frac{dx}{dt} = \underset{\substack{\text{скорость}\\ \text{размножения}}}{\gamma x} - \underset{\substack{\text{скорость}\\ \text{естественной}\\ \text{гибели}}}{\sigma x} - \underset{\substack{\text{скорость гибели}\\ \text{за счет встречи}\\ \text{с хищником}}}{\alpha xy},$$

Хищники:

$$\frac{dy}{dt} = \underset{\substack{\text{скорость}\\ \text{размножения}}}{\delta xy} - \underset{\substack{\text{скорость}\\ \text{естественной гибели}}}{\beta y}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon x - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta xy - \beta y \end{cases}. \qquad (8.4)$$

Это сложная система нелинейных дифференциальных уравнений. Сначала найдем стационарное решение x = const, y = const, то есть dx/dt = 0, dy/dt = 0. Система дифференциальных уравнений при этом сводится к алгебраическим:

$$x_{ст}(\varepsilon - \alpha y_{ст}) = 0$$
$$y_{ст}(\delta x_{ст} - \beta) = 0$$

Рассмотрим решения:

$$x_{ст} = \beta / \delta; \; y_{ст} = \varepsilon / \alpha. \tag{8.5}$$

Упростим систему уравнений (8.4), предполагая, что произошли малые отклонения численности хищников V(t) и жертв U(t) относительно стационарных значений:

$$x = x_{ст} + U(t), \; U < x_{ст}, \; U < y_{ст}; \tag{8.6}$$

$$y = y_{ст} + V(t), \; V < y_{ст}, \; V < x_{ст}. \tag{8.7}$$

Тогда

$$\frac{dU}{dt} = x_{ст}(\varepsilon - \alpha y_{ст}) + U(\varepsilon - \alpha y_{ст}) - \alpha x_{ст} V - \alpha UV,$$

$$\frac{dV}{dt} = y_{ст}(\delta x_{ст} - \beta) + V(\delta x_{ст} - \beta) + \delta U y_{ст} + \delta UV,$$

или

$$\frac{dU}{dt} = x_{ст}^2 \left(-\alpha \frac{V}{x_{ст}} - \alpha \frac{U}{x_{ст}} \cdot \frac{V}{x_{ст}}\right),$$

$$\frac{dV}{dt} = y_{ст}^2 \left(\delta \frac{U}{y_{ст}} + \delta \frac{U}{y_{ст}} \cdot \frac{V}{y_{ст}}\right).$$

Учитывая (8.4) и пренебрегая членами второго порядка малости $\frac{U}{x_{ст}} \cdot \frac{V}{x_{ст}}$ и $\frac{U}{y_{ст}} \cdot \frac{V}{y_{ст}}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -\alpha x_{ст} V \\ \dfrac{dV}{dt} = \delta U y_{ст}, \end{cases} \tag{8.8}$$

которую легко свести к дифференциальным уравнениям второго порядка относительно переменных U и V:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+\varepsilon\beta U=0, \tag{8.9}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2}+\varepsilon\beta V=0. \tag{8.10}$$

Это характерные уравнения для описания гармонических колебательных процессов. Решения уравнений:

$$U=U_{max}\sin\sqrt{\varepsilon\beta}t,$$
$$V=V_{max}\sin(\sqrt{\varepsilon\beta}t+\varphi_0).$$

Отношение амплитуд отклонений:

$$\frac{V_{max}}{U_{max}}=\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}.$$

В результате численности особей при малых отклонениях от стационарных значений равны:

$$x(t)=x_{ст}+U_{max}\sin\sqrt{\varepsilon\beta}t,$$
$$y(t)=y_{ст}+V_{max}\sin(\sqrt{\varepsilon\beta}t+\varphi_0).$$

Таким образом, численности популяций x и y испытывают гармонические колебания относительно стационарных значений с одинаковой частотой $\omega=\sqrt{\varepsilon\beta}$, но смещенные по фазе на φ_0. Периодичность изменения численности хищников и жертв наблюдалась и на опыте. На рис. 8.3 приведены опытные данные по количеству числа добытых шкурок зайцев и рысей в Канаде с 1845 по 1935 г.

Видно, что в реальном случае зависимости более сложные, чем это следует из модели. Необходимо подчеркнуть, что синусоидальное решение возможно лишь при малых отклонениях U и V относительно стационарных значений. При больших отклонениях закон не будет гармоническим (рис. 8.3). Тем не менее данная модель вполне адекватна действительности: колебания численностей хищников и жертв происходят с одинаковой частотой, наблюдается смещение колебаний по фазе.

Зависимость y от x можно представить и в виде фазового портрета. Для периодических зависимостей портрет имеет вид эллипса (рис. 8.4), центр которого соответствует стационарным значениям.

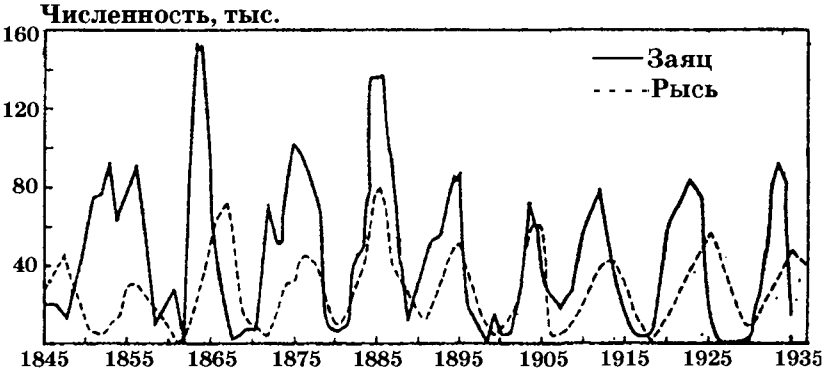

Рис. 8.3. Динамика популяций зайцев и рысей

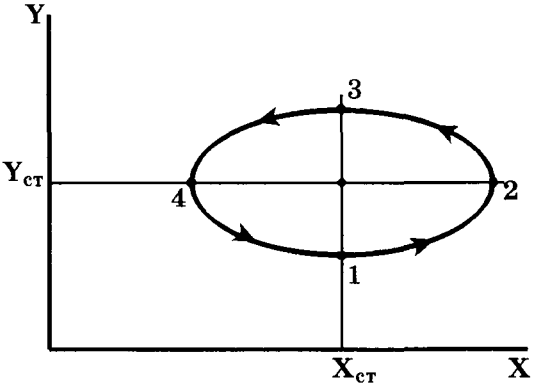

Рис. 8.4. Фазовый портрет системы при малых отклонениях численности хищников и жертв от стационарных значений

Допустим, произошло отклонение численности зайцев от стационарного значения (1→2). Если число зайцев возросло, то число рысей также увеличивается, но количество зайцев при этом постепенно начнет уменьшаться (точка 3). Это повлечет уменьшение числа рысей (точка 4), а следовательно увеличение числа зайцев (точка 1).

Модель «хищник–жертва» используется в настоящее время в медицине. Так при моделировании онкологических заболеваний опухолевые клетки рассматриваются как жертвы, а лимфоциты, которые могут их подавлять, как хищники. В этом случае моделирование позволяет получить новые знания о процессах межклеточного взаимодействия при этих патологиях, находить пути оптимальной стратегии лечения, создавать новые средства борьбы с ними.

Самоорганизация. Синергетика. Возникновение самопроизвольно (то есть без каких-либо периодических внешних воздействий, а только за счет собственных свойств системы) колебаний в системе "хищник-жертва" является классическим примером самоорганизации. Первые исследования явления самоорганизации были проведены И.Р. Пригожиным и его коллегами в 1960-е годы.

Здесь мы видим проявление динамической упорядоченности, свойственной сложным открытым системам, далеким от равновесия. В таких системах (физических, химических, биологических, экологических) при определенных условиях могут возникнуть процессы самоорганизации во времени и в пространстве.

Направление в науке, связанное с изучением общих закономерностей образования упорядоченных временных и пространственных макроструктур, называется *синергетикой.*

Термин «синергетика» происходит от греческого synergetikos – совместное, согласованное, кооперативное действие. Синергетика возникла в начале 70-х гг. 20-го века. Этот термин ввел Г. Хакен для объединения самых различных процессов самоорганизации в макроскопических системах благодаря взаимодействию большого числа элементарных подсистем.

Возникновение самопроизвольно пространственно-временной упорядоченности на макроскопическом уровне возможно только при совокупном, кооперативном взаимодействии большого числа объектов в сложных открытых системах.

Основой синергетики служит единство явлений и моделей, с которыми приходится сталкиваться при исследовании процессов возникновения *порядка* из *хаоса* (так называемых диссипативных структур). Примером самоорганизации в физических явлениях являются ячейки Бенара, в химии – реакция Белоусова–Жаботинского, в биофизике – распространение нервного импульса, в кардиологии – возникновение фибрилляции желудочков сердца, в экологии – организация сообществ, в космологии – спиральные галактики.

§ 33. Фармакокинетическая модель

Для описания кинетики изменения концентрации введенного в организм лекарственного препарата предлагается так называемая фармакокинетическая модель.

Поставим перед собой конкретную цель, а именно найти законы изменения концентрации лекарственного препарата при различных способах и параметрах его введения и выведения.