ББК 22.151
А46
УДК 514(075.8)

Рецензенты:

кафедра алгебры и геометрии Воронежского государственного пединститута,

кафедра геометрии и методики преподавания Новосибирского государственного пединститута

Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.

А46 Геометрия: Учеб. пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 672 с.: ил.

ISBN 5-02-014336-7

Содержит основные разделы курса геометрии: аналитическую геометрию, элементарную еометрию на основе аксиоматики, включая геометричес преобразования и построения, элементы многомерной и проективной геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, основания геометрии с обзором теорий «высшей» геометрии.

Для студентов математических специальностей педвузов и университетов, преподавателей средней школы и техникумов.

А $\dfrac{1602050000-083}{053(02)-90}$ 46-90 ББК 22.151

ISBN 5-02-014336-7

© «Наука». Физматлит, 1990

Часть 5. ТОПОЛОГИЯ

Часть 5

ТОПОЛОГИЯ

С первыми топологическими понятиями мы уже встречались во второй части книги, где определялись внутренние и граничные точки множества и т. п. При общем изучении топологии за основу, оказывается, удобнее всего взять понятие открытого множества.

Здесь мы начинаем с того, что определяем топологическое пространство и изучаем его «геометрию» исходя из аксиом. После того, как введены гомеоморфизмы, изучаются важнейшие топологические свойства пространств и множеств — связность и компактность. В заключение описывается классификация связных компактных двумерных многообразий, к которым относятся такие интересные объекты, как лист Мебиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость и сферы с ручками.

Глава I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Топология в множестве

Пусть X — произвольное множество. *Топологической структурой* или *топологией* в множестве X называется совокупность Ω его подмножеств, для которой выполнены три условия:

а) Объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности Ω, также принадлежит совокупности Ω;

б) пересечение любых двух множеств, принадлежащих совокупности Ω, также принадлежит совокупности Ω;

в) пустое множество $\varnothing$ и все множество X принадлежат совокупности Ω.

Множество X с выделенной топологической структурой Ω называется *топологическим пространством* и обозначается (X, Ω) или просто X, если ясно, о какой топологической структуре идет речь. Элементы множества X называются *точками* пространства (X, Ω). Множества, входящие в выделенную совокупность Ω, называются *открытыми* в X множествами [1]). Условия а) — в) называются *аксиомами топологической структуры*. Они выражают следующие основные свойства открытых множеств:

а) *объединение любого семейства открытых множеств открыто*;

б) *пересечение любых двух открытых множеств открыто*;

в) *пустое множество и все пространство открыты.*

Заметим, что, как следует из б) по индукции,

б′) *пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.*

Запишем аксиомы а)—в) еще и при помощи формул.

а) Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство множеств U_α, где индекс α пробегает множество индексов I. Если $U_\alpha \in \Omega$ для каждого индекса α из I, то и $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$.

б) Если U_1, $U_2 \in \Omega$, то и $U_1 \cap U_2 \in \Omega$.

в) $\varnothing, X \in \Omega$.

Наконец, утверждение б′) означает, что если U_1, $U_2, \ldots, U_n \in \Omega$, то и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \Omega$.

Рассмотрим простейшие примеры топологических пространств.

1. Если Ω совпадает с множеством всех подмножеств множества X, то топологическое пространство (X, Ω) называется *дискретным*. Мы видим, что в дискретном пространстве все множества открыты.

2. Если Ω содержит всего два множества: $\varnothing$ и X, то топологическое пространство (X, Ω) называется *антидискретным* пространством или пространством с *тривиальной топологией*. В антидискретном пространстве только два открытых множества: пустое множество и все пространство. (Дискретное пространство можно сравнить с мешком гороха, где

[1]) Буква Ω соответствует букве O, с которой начинаются слова: открытый, open (англ.), offen (нем.), ouvert (франц.), все означающие одно и то же.

каждая горошинка — сама по себе, а антидискретное — с запутанным клубком ниток или тарелкой спагетти. Здесь роль точек играют отдельные горошины и макаронины.)

3. Пусть X есть луч $[0, +\infty)$, а Ω состоит из $\varnothing$, X и всевозможных лучей $(a, +\infty)$, где $a \geqslant 0$.

Для совокупности Ω аксиомы б) и в), очевидно, выполнены, а аксиома а) просто означает, что объединение любого семейства таких лучей снова есть луч. Пространство (X, Ω) называется *стрелкой*.

Дискретная и антидискретная топологии сами по себе не слишком интересны, но мы постоянно будем пользоваться ими в качестве простейших примеров.

Дополнения открытых множеств имеют специальное название.

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым* в пространстве (X, Ω), если его дополнение $X \setminus F$ открыто, т. е. $X \setminus F \in \Omega$.

Примеры. 1. В дискретном пространстве все множества замкнуты.

2. В антидискретном пространстве только два замкнутых множества: пустое множество и все пространство.

3. В стрелке замкнуты пустое множество $\varnothing$, весь луч $[0, +\infty)$ и отрезки вида $[0, a]$, где $a \geqslant 0$.

Перечислим свойства замкнутых множеств, вытекающие из аксиом топологической структуры.

Теорема.

а) *Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.*

б) *Объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто.*

в) *Пустое множество и все пространство замкнуты.*

Из утверждения б) следует по индукции, что

б′) *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Начнем со свойства в). Оно вытекает из аксиомы в) топологической структуры: пустое множество $\varnothing$ замкнуто, поскольку открыто его дополнение — все пространство X; а все пространство X замкнуто, поскольку открыто его дополнение — пустое множество $\varnothing$.

Перейдем к свойству б). Пусть F, $G \subset X$ — замкнутые множества. Это значит, что их дополнения $X \setminus F$ и $X \setminus G$ открыты. Чтобы доказать, что объединение $F \cup G$ тоже замкнуто, нужно проверить, что дополнение множества $F \cup G$ открыто. Но дополнение объединения двух множеств совпадает с пересечением их дополнений:

$$X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)\,^{1}).$$

Поэтому множество $X \setminus (F \cup G)$ открыто как пересечение двух открытых множеств (аксиома б) топологической структуры).

Докажем, наконец, свойство а). Пусть $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство замкнутых множеств пространства. Это значит, что открыты их дополнения — множества $X \setminus F_\alpha$, $\alpha \in I$. Чтобы доказать, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ тоже замкнуто, нужно проверить, что дополнение множества $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ открыто. Но дополнение пересечения нескольких множеств совпадает с объединением их дополнений:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha).$$

Поэтому множество $X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ открыто как объединение нескольких открытых множеств (аксиома а) топологической структуры). □

На примере дискретного и антидискретного пространств видно, что множество может быть одновременно открытым и замкнутым, а может не быть ни замкнутым, ни открытым (как закрытая, но не запертая дверь!).

Свойства замкнутых и открытых множеств в чем-то похожи. Важное различие между ними в том, что пересечение бесконечного семейства открытых множеств не обязательно открыто, а пересечение бесконечного семейства замкнутых множеств всегда замкнуто; в то же время объединение бесконечного

---

[1]) Для обозначения дополнения множества иногда используется значок C (стилизованная первая буква слова complement — дополнение). Тогда запись становится симметричной: $\complement(F \cup G) = \complement F \cap \complement G$.

семейства замкнутых множеств не обязательно замкнуто, а объединение бесконечного семейства открытых множеств всегда открыто. Например, на числовой прямой $\mathbf{R}^1$ имеем

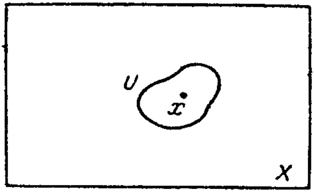

Рис. 1

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)=[-1,\ 1],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]=(-1,\ 1)!$$

Наконец, дадим еще одно определение. *Топологической окрестностью точки x* топологического пространства X называется всякое открытое множество U, содержащее эту точку x (рис. 1). Часто мы будем опускать слово «топологическая» и говорить просто «окрестность».

§ 2. Метрика в множестве

Пусть M — произвольное множество. *Метрикой* в множестве M называется такая вещественная функция ρ, определенная на множестве всевозможных пар элементов множества M:

$$\rho\colon\ M\times M\to\mathbf{R},\qquad (x,\ y)\longmapsto\rho(x,\ y),$$

что выполнены четыре условия:

а) функция ρ принимает только неотрицательные значения: $\rho(x,y)\geqslant 0$ для любых x, y из M;

б) $\rho(x,x)=0$ для любого элемента x из M, и если $\rho(x,y)=0$, то обязательно $x=y$;

в) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых x, y из M;

г) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ для любых x, y, z из M.

Множество M с фиксированной метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается (M,ρ) или просто M, если ясно, о какой метрике идет речь. Элементы множества M называются *точками* пространства (M,ρ). Значение метрической функции ρ на паре элементов x, y называется *расстоянием* между точками x и y и обозначается обычно симвосемейства замкнутых множеств не обязательно замкнуто, а объединение бесконечного семейства открытых множеств всегда открыто. Например, на числовой прямой $\mathbf{R}^1$ имеем

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)=[-1,\ 1],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]=(-1,\ 1)!$$

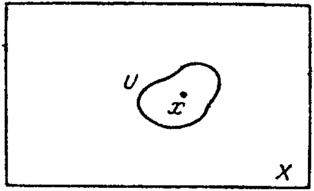

Рис. 1

Наконец, дадим еще одно определение. *Топологической окрестностью точки* x топологического пространства X называется всякое открытое множество U, содержащее эту точку x (рис. 1). Часто мы будем опускать слово «топологическая» и говорить просто «окрестность».