§ 2. Метрика в множестве

Пусть M — произвольное множество. *Метрикой* в множестве M называется такая вещественная функция ρ, определенная на множестве всевозможных пар элементов множества M:

$$\rho\colon M \times M \to \mathbf{R}, \qquad (x, y) \mapsto \rho(x, y),$$

что выполнены четыре условия:

а) функция ρ принимает только неотрицательные значения: $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых x, y из M;

б) $\rho(x, x) = 0$ для любого элемента x из M, и если $\rho(x, y) = 0$, то обязательно $x = y$;

в) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x, y из M;

г) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y, z из M.

Множество M с фиксированной метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается (M, ρ) или просто M, если ясно, о какой метрике идет речь. Элементы множества M называются *точками* пространства (M, ρ). Значение метрической функции ρ на паре элементов x, y называется *расстоянием* между точками x и y и обозначается обычно символом $\mathrm{dist}(x, y)$[1]: $\mathrm{dist}(x, y) = \rho(x, y)$. Это обозначение позволяет не указывать явно метрическую функцию. Условия а) — г) называются *аксиомами метрики.* Они выражают основные свойства расстояния:

а) Неотрицательность: *расстояние между двумя точками всегда неотрицательно.*

б) Аксиома тождества: *расстояние между точками равно нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают.*

в) Симметричность: *расстояние от точки x до точки y равно расстоянию от точки y до точки x.*

Условие г) называется *неравенством треугольника,* поскольку оно аналогично тому факту, что длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

Рассмотрим примеры метрических пространств.

1. Возьмем в качестве множества M произвольное множество и для любых x, y из M положим $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$, и $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$. Такая метрика называется *симплициальной.* В пространстве с симплициальной метрикой расстояние между любыми двумя различными точками равно 1.

2. Возьмем в качестве множества M множество всех вещественных чисел $\mathbf{R}$. Определим метрику ρ по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Это *стандартная метрика* на прямой.

3. Возьмем в качестве M n-мерное евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, а в качестве метрики ρ — обычное *евклидово расстояние* между точками: если $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — точки пространства $\mathbf{R}^n$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

4. Рассмотрим в качестве M n-мерное проективное пространство, т. е. множество всех прямых в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. При $n = 2$ это проективная плоскость, а при $n = 3$ — обычное проективное пространство. Расстояние между двумя «точками» — прямыми l_1 и l_2 положим равным углу между l_1 и l_2.

[1]) От distance (фр., англ.) Ср. русское «дистанция».

Первые три аксиомы метрики, очевидно, выполнены. Четвертая аксиома — неравенство треугольника — выражает тот факт, что в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух остальных (см. ч. 2, гл. III, § 4, теорема 1).

Евклидово n-мерное пространство, — в первую очередь, плоскость и обычное трехмерное пространство — будут для нас основными примерами метрических пространств. Теорию метрических пространств можно считать разновидностью геометрии, построенной исключительно на понятии расстояния.

Всякое подмножество A метрического пространства M можно рассматривать как самостоятельное метрическое пространство. Для этого нужно определить расстояние между каждыми двумя его точками как расстояние между этими же точками в исходном пространстве M. Такая метрика называется *индуцированной*. Подмножество A, наделенное индуцированной метрикой, называется *метрическим подпространством* метрического пространства M.

Пусть M — метрическое пространство, a — его точка, r — положительное число. Множество точек пространства M, удаленных от точки a на расстояние, не большее r, называется *замкнутым* шаром пространства M с *центром* в точке a и *радиусом* r и обозначается символом $\mathrm{D}_r(a)$[1]). Множество точек, удаленных от точки a на расстояние, меньшее r, называется *открытым шаром* и обозначается $\mathrm{B}_r(a)$[2]). Наконец, множество точек, расположенных на расстоянии r от точки a, называется *сферой* и обозначается $\mathrm{S}_r(a)$[3]). Таким образом,

$$\mathrm{D}_r(a) = \{x \in M\colon \operatorname{dist}(a, x) \leqslant r\},$$
$$\mathrm{B}_r(a) = \{x \in M\colon \operatorname{dist}(a, x) < r\},$$
$$\mathrm{S}_r(a) = \{x \in M\colon \operatorname{dist}(a, x) = r\}.$$

Единичные замкнутый шар и сферу в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ обозначим через D^n и S^{n-1}. В случае когда M — обычное евклидово пространство, метрические сферы и замкнутые шары представляют собой

---

[1]) От disc — диск.

[2]) От Ball (нем.), ball (англ.), balle (фр.).

[3]) От Sphäre (нем.), sphere (англ.), sphère (фр.).

хорошо знакомые нам геометрические фигуры — обычные сферы и шары.

Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в данной точке часто также называется *ε-окрестностью* этой точки.

Подмножество A метрического пространства M называют *ограниченным*, если всевозможные попарные расстояния между его точками не превосходят некоторого фиксированного числа d. Ясно, что в этом случае все множество A содержится в шаре радиуса d с центром в произвольной точке множества A [1]). Наоборот, если множество A содержится в некотором шаре радиуса r с центром в некоторой точке a, то оно ограничено в силу неравенства треугольника. Действительно, пусть x, y — две точки из A. Тогда

$$\operatorname{dist}(x, y) \leqslant \operatorname{dist}(x, a) + \operatorname{dist}(a, y) \leqslant 2r.$$

Поэтому в качестве d можно взять число $2r$.

Опишем теперь некоторую выделенную топологическую структуру, которая существует во всяком метрическом пространстве M. Пусть $\Omega(M)$ — семейство всех множеств U, которые вместе с каждой своей точкой x содержат некоторую ее шаровую окрестность, т. е.

$$U \in \Omega(M) \Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists r > 0\colon\ \mathrm{B}_r(x) \subset U.$$

Пустое множество тоже считается принадлежащим семейству $\Omega(M)$. (Пустое множество $\varnothing$ никаких точек не содержит, и потому, как принято считать, «все его точки» обладают любым наперед заданным свойством. В частности, они содержатся в пустом множестве вместе со всеми своими шаровыми окрестностями.)

Теорема 1. *Для совокупности* $\Omega(M)$ *выполнены аксиомы топологической структуры.*

Доказательство. Начнем с аксиомы а). Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство множеств, принадлежащих совокупности $\Omega(M)$. Чтобы доказать, что их объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ также принадлежит совокупности $\Omega(M)$, найдем для произвольной точки

---

[1]) Разумеется, если множество A непусто. Пустое множество считается ограниченным по определению.

$a \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ некоторую ее шаровую окрестность V, содержащуюся в множестве $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Воспользуемся тем, что $a \in U_{\alpha'}$ для некоторого индекса α' из I. В множестве $U_{\alpha'}$ вместе с точкой a содержится некоторая ее шаровая окрестность V. Тем более, V содержится в множестве $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, и, значит, окрестность V искомая.

Перейдем к аксиоме б). Пусть U_1, U_2 — два множества, принадлежащие совокупности $\Omega(M)$. Чтобы доказать, что их пересечение $U_1 \cap U_2$ тоже принадлежит совокупности $\Omega(M)$, найдем для произвольной точки a из $U_1 \cap U_2$ некоторую ее шаровую окрестность, содержащуюся в множестве $U_1 \cap U_2$. Пусть множество U_1 содержит ε_1-окрестность точки a, а множество U_2 содержит ε_2-окрестность точки a, причем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Обозначим через ε меньшее из чисел ε_1, ε_2. Тогда, очевидно, ε-окрестность точки a содержится в каждом из множеств U_1 и U_2, а значит, и в их пересечении $U_1 \cap U_2$.

Наконец, проверим аксиому в). Все пространство M заведомо принадлежит совокупности Ω, поскольку с каждой своей точкой содержит все ее шаровые окрестности. Пустое множество $\varnothing$ также принадлежит совокупности $\Omega(M)$. Теорема 1 доказана. □

Итак, мы проверили, что совокупность $\Omega(M)$ задает топологию в множестве M, которая называется *метрической топологией*. О метрической топологии часто говорят, как о топологии, которую *порождает* метрика. Множества, входящие в совокупность $\Omega(M)$, называются *открытыми подмножествами* метрического пространства M. Таким образом, открытыми в метрическом пространстве называются множества, которые вместе с каждой своей точкой содержат все достаточно близкие к ней точки.

Докажем, что *всякий открытый шар* $\mathrm{B}_r(a)$ *является открытым множеством.*

Пусть b — произвольная точка этого шара. Тогда $\operatorname{dist}(a, b) < r$. Положим $\varepsilon = r - \operatorname{dist}(a, b)$. Достаточно убедиться в том, что точка b содержится в шаре $\mathrm{B}_r(a)$ вместе со своей ε-окрестностью $\mathrm{B}_\varepsilon(b)$. Для этого проверим, что в шаре $\mathrm{B}_r(a)$ содержится каждая точка $x \in B_\varepsilon(b)$. Но это следует из неравенства треугольника и того, что $\operatorname{dist}(x, b) < \varepsilon$:

$$\operatorname{dist}(x, a) \leqslant \operatorname{dist}(x, b) + \operatorname{dist}(b, a) < \varepsilon + \operatorname{dist}(b, a) = r.$$

В частности, *всякая ε-окрестность точки метрического пространства является ее топологической окрестностью (в метрической топологии)*.

Пусть (X, Ω) — топологическое пространство. Если топологическая структура Ω порождается некоторой метрикой в множестве X, то топологическое пространство (X, Ω) называется *метризуемым*. Две метрики, порождающие одну и ту же топологию, называются *эквивалентными*.