§ 3. Внутренность, замыкание, граница

Пусть A — подмножество топологического пространства X.

Среди открытых множеств, содержащихся в множестве A, есть наибольшее: это объединение всех таких множеств. Оно называется *внутренней частью* или *внутренностью* множества A и обозначается символом $\operatorname{int} A$ или, подробнее, $\operatorname{int}_X A$ [1]).

Например, в случае когда $X = \mathbf{R}$ — числовая прямая, имеем $\operatorname{int}[0, 1] = (0, 1)$.

Всякое открытое множество, очевидно, совпадает со своей внутренней частью, и наоборот, если множество совпадает со своей внутренностью, то оно открыто:

$$A = \operatorname{int} A \Leftrightarrow A \in \Omega.$$

Подобным образом среди всех замкнутых множеств, содержащих множество A, есть наименьшее: это пересечение всех таких множеств. Оно называется *замыканием* множества A и обозначается символом $\operatorname{cl} A$ или, подробнее, $\operatorname{cl}_X A$ [2]).

Например, когда $X = \mathbf{R}$ — числовая прямая, получаем $\operatorname{cl}(0, 1) = [0, 1]$.

Всякое замкнутое множество, очевидно, совпадает со своим замыканием, и наоборот, если множество

[1]) От interieur (фр.) и interior (англ.). Другое распространенное обозначение для внутренности — $\mathring{A}$.

[2]) От clôture (фр.) и closure (англ.). Другое распространенное обозначение для замыкания — $\overline{A}$.

совпадает со своим замыканием, то оно замкнуто:

$$A = \mathrm{cl}\, A \Leftrightarrow A \text{ замкнуто.}$$

Очевидно, что внутренность множества A содержится в его замыкании:

$$\mathrm{int}\, A \subset \mathrm{cl}\, A.$$

Точки, принадлежащие замыканию множества A, но не принадлежащие его внутренности, образуют *границу* множества A. Граница обозначается символом $\mathrm{fr}\, A$ или, подробнее, $\mathrm{fr}_X A$ [1]):

$$\mathrm{fr}\, A = \mathrm{cl}\, A \setminus \mathrm{int}\, A.$$

Например, в случае, когда $X = \mathbf{R}$ — числовая прямая, имеем $\mathrm{fr}\,[0, 1] = \mathrm{fr}\,(0, 1) = \{0, 1\}$, т. е. граница интервала состоит из двух точек — его концов.

Так как разность двух множеств равна пересечению первого множества с дополнением второго множества, то

$$\mathrm{fr}\, A = \mathrm{cl}\, A \setminus \mathrm{int}\, A = \mathrm{cl}\, A \cap (X \setminus \mathrm{int}\, A).$$

Следовательно, граница $\mathrm{fr}\, A$ замкнута как пересечение двух замкнутых множеств.

Расположение точки относительно множества. Принадлежность произвольной точки пространства замыканию, внутренности или границе множества может быть описана на языке окрестностей.

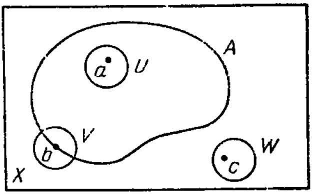

Рис. 2

Определение. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Точка x называется (рис. 2):

а) *внутренней точкой* множества A, если она лежит в A вместе с некоторой своей окрестностью;

б) *граничной точкой* множества A, если всякая ее окрестность пересекается и с множеством A, и с его дополнением $X \setminus A$;

в) *внешней точкой* множества A, если она лежит в дополнении множества A вместе с некоторой своей окрестностью.

---

[1]) От frontière (фр.) и frontier (англ.). Другое распространенное обозначение для границы — ∂A.

Ясно, что каждая точка $x \in X$ является по отношению к множеству A либо внутренней, либо граничной, либо внешней. Внутренние и граничные точки называются *точками прикосновения* множества A. Таким образом, точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества A, если всякая ее окрестность пересекается с множеством A.

Теорема 1. а) *Внутренность* $\operatorname{int} A$ *всякого множества* A *есть множество его внутренних точек.*

б) *Замыкание* $\operatorname{cl} A$ *всякого множества* A *есть множество его точек прикосновения.*

в) *Граница* $\operatorname{fr} A$ *всякого множества* A *есть множество его граничных точек.*

Доказательство. а) Так как внутренность $\operatorname{int} A$ открыта, то она является окрестностью для всякой своей точки. Поэтому все ее точки — внутренние для множества A. Следовательно, множество $\operatorname{int} A$ содержится в множестве внутренних точек множества A.

Докажем обратное включение. Пусть $a \in A$ — произвольная внутренняя точка. Она содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью U. Так как $\operatorname{int} A$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в A, то окрестность U, а с ней и сама точка a содержится в множестве $\operatorname{int} A$. Следовательно, множество $\operatorname{int} A$ содержит множество внутренних точек множества A, а значит, в силу доказанного выше, и совпадает с ним.

б) Чтобы доказать, что множество $\operatorname{cl} A$ совпадает с множеством точек прикосновения множества A, проверим, что совпадают их дополнения. Дополнение к множеству точек прикосновения совпадает с множеством внутренних точек множества $X \setminus A$, т. е. с множеством $\operatorname{int}(X \setminus A)$. Но нетрудно показать, что и

$$X \setminus \operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \setminus A).$$

в) С очевидностью следует из а) и б) и того, что, во-первых, $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$, и, во-вторых, граничные точки множества — это те точки прикосновения, которые не являются внутренними. Теорема 1 доказана $\square$