§ 4. Подпространства топологического пространства

Подобно тому как всякое подмножество метрического пространства наделяется метрикой, так всякое подмножество топологического пространства может быть наделено естественной топологической структурой. (Сравните с тем, что далеко не всякое подмножество группы является ее подгруппой, подмножество линейного пространства — его подпространством.)

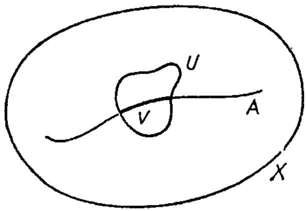

Рис. 3

Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, Ω) (рис. 3). Обозначим через Ω_A совокупность всех подмножеств множества A, которые являются пересечениями открытых множеств пространства X с множеством A:

$$\Omega_A = \{U \cap A \colon U \subset \Omega\}.$$

Теорема 1. *Совокупность Ω_A удовлетворяет аксиомам топологической структуры.*

Доказательство. Начнем с аксиомы а). Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство множеств, принадлежащих совокупности Ω_A. Это значит, что каждое множество V_α является пересечением некоторого открытого в X множества U_α с множеством A:

$$V_\alpha = U_\alpha \cap A.$$

Чтобы доказать, что их объединение $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ тоже принадлежит совокупности Ω_A, представим множество $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ в виде пересечения некоторого открытого множества с множеством A. Действительно,

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap A) = \Big(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\Big) \cap A,$$

где множество $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ открыто как объединение нескольких открытых множеств.

Перейдем к аксиоме б). Пусть V_1, V_2 — два множества из совокупности Ω_A. Чтобы доказать, что их пересечение $V_1 \cap V_2$ также принадлежит совокупности

Ω, представим множество $V_1 \cap V_2$ в виде пересечения множества A с некоторым открытым множеством пространства X. Пусть $V_1 = U_1 \cap A$ и $V_2 = U_2 \cap A$, где U_1, U_2 — открытые множества. Тогда

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \cap A,$$

где множество $U_1 \cap U_2$ открыто как пересечение двух открытых множеств.

Наконец, аксиома в) очевидна: множества A и $\varnothing$ тривиальным образом представляются в виде пересечения открытых множеств пространства X с множеством A:

$$A = X \cap A, \qquad \varnothing = \varnothing \cap A. \ \square$$

Итак, мы проверили, что совокупность Ω_A задает топологию в множестве A. Говорят, что топология Ω_A *индуцируется* топологией Ω, и называют ее *индуцированной топологией*. Множество A, снабженное индуцированной топологией, называется *топологическим подпространством* топологического пространства (X, Ω) и обозначается (A, Ω_A), или просто A, если ясно, что речь идет именно об индуцированной топологической структуре. Множества, входящие в совокупность Ω_A, называются *открытыми в множестве* A. Итак, открытыми в A являются множества, высекаемые в нем множествами, открытыми в пространстве X. Как обычно, множество $G \subset A$ называется *замкнутым в множестве* A, если его дополнение $A \setminus G$ открыто в A.

Теорема 2. *В множестве A замкнуты те и только те множества, которые являются пересечениями замкнутых множеств пространства X с множеством A.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество пространства X. Чтобы доказать, что множество $F \cap A$ замкнуто в A, нужно проверить, что его дополнение $A \setminus (F \cap A) = A \setminus F$ открыто в множестве A. Для этого представим множество $A \setminus F$ в виде пересечения множества A с некоторым открытым множеством пространства X:

$$A \setminus F = A \cap (X \setminus F),$$

где множество $X \setminus F$ открыто как дополнение замкнутого множества F.

Наоборот, пусть множество $G \subset A$ замкнуто в A. Это значит, что его дополнение $A \setminus G$ открыто в A. Это, в свою очередь, означает, что $A \setminus G = A \cap U$ для некоторого множества U, открытого в X. Множество $X \setminus U$, замкнутое в пространстве X, и дает в пересечении с множеством A множество G. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся цепочкой равенств:

$$A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U) = A \setminus (A \setminus G) = G. \ \square$$