§ 5. Непрерывные отображения

Непрерывность «в целом». Отображение одного топологического пространства в другое называется *непрерывным в целом* (или просто — *непрерывным*), если при этом отображении прообраз любого открытого множества открыт. Таким образом, если (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ — отображение, то f непрерывно, если

$$U \in \Omega_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \Omega_X.$$

Примеры. 1. *Тождественное отображение* любого топологического пространства X в себя непрерывно. Оно обозначается id_X:

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, \quad x \mapsto x.$$

2. Постоянное отображение всегда непрерывно. Пусть X, Y — топологические пространства, $y_0 \in Y$ — точка, а f — постоянное отображение:

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto y_0.$$

Тогда прообраз любого открытого множества $U \subset Y$ совпадает с X, если $y_0 \in U$, и пуст в противном случае.

3. Любое отображение дискретного пространства в любое топологическое пространство непрерывно.

4. Любое отображение любого топологического пространства в антидискретное пространство непрерывно.

5. *Отображение включения* в топологическое пространство X любого его подпространства A. Оно обозначается через in_A:

$$\mathrm{in}_A\colon A \to X, \quad a \mapsto a.$$

При отображении включения прообраз любого множества $B \subset X$ совпадает с пересечением этого множества и подпространства A:

$$\mathrm{in}_A^{-1}(B) = B \cap A.$$

Поэтому прообраз любого открытого множества в X открыт в подпространстве A по определению индуцированной топологии в A. Это доказывает, что отображение in_A непрерывно.

Непрерывность отображения в целом можно определить и при помощи замкнутых множеств.

Теорема 1. *Отображение f: $X \to Y$ непрерывно в целом тогда и только тогда, когда при этом отображении прообраз любого замкнутого множества A замкнут.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно. Чтобы доказать, что множество $f^{-1}(A)$ замкнуто, проверим, что его дополнение $X \setminus f^{-1}(A)$ открыто. Действительно, оно совпадает с прообразом дополнения множества A:

$$X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A).$$

А множество $f^{-1}(Y \setminus A)$ открыто как прообраз открытого множества $Y \setminus A$ при непрерывном отображении f.

В обратную сторону доказательство проводится аналогично. □

Замечание. Важно отметить, что, в отличие от прообразов, при непрерывных в целом отображениях образы открытых (замкнутых) множеств вовсе не обязательно будут открытыми (замкнутыми). Чтобы убедиться в этом, вернитесь к примерам 3 и 4.

Отметим простое, но очень важное свойство непрерывных отображений.

Теорема 2. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Более подробно, если X, Y, Z — топологические пространства, а f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — непрерывные отображения, то их композиция $g \circ f$: $X \to Z$ есть непрерывное отображение.

Доказательство. Обозначим через h сквозное отображение: $h = g \circ f$. Для проверки его непрерывности требуется доказать, что если $U \subset Z$ — произвольное открытое множество, то его прообраз $h^{-1}(U)$ открыт в X. В самом деле, множество $g^{-1}(U)$ открыто в Y в силу непрерывности отображения g, а его прообраз $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыт в X в силу непрерывности отображения f. Осталось заметить, что $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Следствие. *Сужение непрерывного отображения непрерывно.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, а A — подмножество пространства X, то сужение отображения f на A непрерывно как композиция непрерывных отображений — включения $A \to X$ и f:

$$f|_A = f \circ \mathrm{in}_A. \quad \square$$

Определение. Образ топологического пространства при непрерывном в целом отображении часто называется *непрерывным образом* этого пространства.

Непрерывность в точке. Технически непрерывность конкретного отображения проще проверять в отдельных точках.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для всякой окрестности V образа $f(x_0)$ этой точки существует окрестность U самой точки x_0, образ которой содержится в выбранной окрестности V:

$$f(U) \subset V.$$

В случае, когда X и Y — метрические пространства, в качестве U и V достаточно рассматривать шаровые окрестности; поэтому в этом случае наше определение непрерывности в точке равносильно классическому определению из математического анализа:

Отображение $f\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что образ любой точки $x \in X$, удаленной от x_0 менее, чем на δ, удален от образа точки x_0 менее, чем на ε:

$$\operatorname{dist}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \operatorname{dist}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Вернемся к топологическим пространствам.

Теорема 3. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в целом тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке пространства X.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно в целом, а $x_0 \in X$ — произвольная точка. Проверим определение непрерывности в точке. Для произвольной окрестности V точки $f(x_0)$ в качестве искомой окрестности U можно взять множество $f^{-1}(V)$: оно содержит точку x_0 и открыто в силу непрерывности в целом отображения f. Наконец, включение $f(U) \subset V$ очевидно.

Докажем обратное утверждение.

Пусть отображение f непрерывно в каждой точке. Нам нужно проверить, что прообраз произвольного открытого множества $V \subset Y$ открыт в X. Для этого заметим, что каждая точка x_0 множества $f^{-1}(V)$ внутренняя, т. е. лежит в нем вместе с некоторой своей окрестностью U. Наличие такой окрестности следует из непрерывности отображения f в точке x_0 и того, что V является окрестностью точки x_0. □

Всюду в дальнейшем мы будем называть непрерывные в целом отображения просто непрерывными.