§ 6. Гомеоморфизмы

Определение. Отображение одного топологического пространства в другое называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, обратимо и обратное к нему отображение тоже непрерывно [1]).

Таким образом, если X и Y — топологические пространства, то непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является гомеоморфизмом, если f обратимо (т. е. f — биекция) и отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ также непрерывно.

Из непрерывности и обратимости отображения еще не следует непрерывность обратимого отображения.

Контрпримеры. 1. Пусть $X = \{a, b\}$ и $Y = \{c, d\}$ — двухточечные топологические пространства. Если пространство X дискретно, а пространство Y антидискретно, то отображение $f\colon X \to Y$, $a \mapsto c$, $b \mapsto d$,

---

[1]) Иногда, особенно в старых книгах, используется термин «топологическое отображение».

очевидно, является непрерывным и обратимым. В то же время обратное отображение не будет непрерывным.

2. Рассмотрим хорошо знакомое нам отображение f: $[0, 2\pi) \to S^1 \subset \mathbf{R}^2$ полуоткрытого интервала в единичную окружность, заданное формулой $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Оно непрерывно и биективно. Но обратное отображение терпит разрыв в точке $(1, 0) \in S^1$.

Примеры гомеоморфизмов.

1. Биективное отображение дискретного пространства в дискретное всегда является гомеоморфизмом. Это очевидно.

2. Точно так же биективное отображение антидискретного пространства в антидискретное всегда является гомеоморфизмом.

3. Менее тривиальный пример гомеоморфизма:

$$\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \operatorname{tg} x.$$

Обратное отображение здесь — $\operatorname{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Сужение этого гомеоморфизма на интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ дает нам гомеоморфизм $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to [0, +\infty)$, а сужение его на интервал $(0, \pi/2)$ дает нам гомеоморфизм $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, +\infty)$.

Свойства. Перечислим простейшие, но очень важные свойства гомеоморфизмов.

Теорема 1. а) *Тождественное отображение любого топологического пространства в себя есть гомеоморфизм.*

б) *Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм.*

в) *Композиция двух гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Пункты а) и б) очевидны. Докажем пункт в). Пусть f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — гомеоморфизмы. Тогда их композиция $h = g \circ f$: $X \to Z$ непрерывна, так как отображения f и g непрерывны; отображение h — биекция, так как f и g — биекции; наконец, обратное отображение $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: $Z \to X$ непрерывно, так как f^{-1} и g^{-1} непрерывны. □

Вот еще некоторые свойства гомеоморфизмов.

При гомеоморфизме образ любого открытого множества открыт, а образ замкнутого множества замкнут.

Действительно, пусть $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, $g = f^{-1}\colon Y \to X$ — обратное отображение и $U \subset X$ — открытое множество. Тогда множество $f(U) = g^{-1}(U)$ открыто в силу непрерывности отображения g (рис. 4).

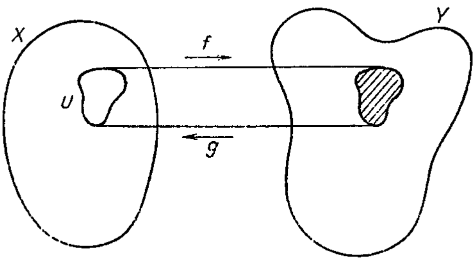

Рис. 4

Замкнутость образа замкнутого множества проверяется аналогично. □

Тем самым *гомеоморфизм $f\colon X \to Y$ определяет взаимно однозначное соответствие между топологическими структурами пространств X и Y.* Пользуясь этим, нетрудно показать, что если $A \subset X$ — произвольное множество, то

$$f(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl}(f(A)), \qquad f(\operatorname{int} A) = \operatorname{int}(f(A)),$$
$$f(\operatorname{fr} A) = \operatorname{fr}(f(A)),$$

а если A есть окрестность точки $x_0 \in X$, то $f(A)$ есть окрестность точки $f(x_0) \in Y$, и т. д.

Таким образом, с топологической точки зрения гомеоморфные пространства устроены совершенно одинаково — гомеоморфизм $X \to Y$ отождествляет все явления в пространствах X и Y, определяемые в терминах топологической структуры.

Здесь мы подошли к одному из важнейших определений курса.

Определение. Говорят, что пространство X *гомеоморфно* пространству Y, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$. Гомеоморфность мы будем обозначать значком $\cong$ или, подробнее, $\cong_f$:

$$X \cong Y, \quad X \cong_f Y.$$

Предыдущая теорема 1 позволяет доказать, что:

Теорема 2. *Отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности.* Для этого надо проверить три свойства, входящие в определение отношения эквивалентности.

а) Рефлексивность. Всякое топологическое пространство гомеоморфно самому себе:

$$X \cong X.$$

б) Симметричность. Если пространство X гомеоморфно пространству Y, то и пространство Y, в свою очередь, гомеоморфно пространству X:

$$X \cong Y \Rightarrow Y \cong X.$$

в) Транзитивность. Если пространство X гомеоморфно пространству Y, а пространство Y гомеоморфно пространству Z, то пространство X гомеоморфно пространству Z:

$$X \cong Y,\ Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

Доказательство. Достаточно указать соответствующие гомеоморфизмы. В случае а) это тождественное отображение id_X. В случае б) это $f^{-1}\colon Y \to X$, где $f\colon X \to Y$ — исходный гомеоморфизм. Наконец, в случае в) это $g \circ f\colon X \to Z$, где $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — исходные гомеоморфизмы. При помощи символики это записывается так:

а) $X \cong_{\mathrm{id}} X$;

б) $X \cong_f Y \Rightarrow Y \cong_{f^{-1}} X$;

в) $X \cong_f Y,\ Y \cong_g Z \Rightarrow X \cong_{g \circ f} Z$. □

Топологический тип. Таким образом, все топологические пространства разбиваются на классы эквивалентности относительно отношения гомеоморфности. Эти классы называются *топологическими типами.* Топологические пространства имеют один и тот же топологический тип в том и только в том случае, если они гомеоморфны.

Важной (особенно в методологическом отношении) является *проблема гомеоморфизма*. Она заключается в том, чтобы определить, гомеоморфны ли два данных топологических пространства. Такая постановка вопроса приобретает смысл, если речь идет о пространствах из какого-нибудь обозримого класса топологических пространств. Идеальное ее решение заключается в том, чтобы перечислить все топологические типы, встречающиеся в этом классе, и указать способ, позволяющий отнести каждое пространство к своему типу.

Первое составляет содержание *классификации*, второе — *алгоритмической классификации* пространств данного класса.

Топологические свойства. В случае двух пространств положительный ответ на вопрос об их гомеоморфности часто дать проще, чем отрицательный: в простых случаях обычно можно указать конкретный гомеоморфизм одного пространства в другое. Доказать негомеоморфность двух пространств сложнее: для этого надо доказать, что искомого гомеоморфизма *не существует*. На помощь приходят *топологические свойства*. Так называются свойства топологических пространств, которыми гомеоморфные пространства обладают или не обладают одновременно. Примеры топологических свойств: конечность и счетность топологического пространства и топологии, метризуемость, дискретность и антидискретность.

Вообще, топологическим будет любое свойство, которое можно сформулировать исключительно в терминах топологической структуры: открытых и замкнутых множеств.

Топология как раздел геометрии. В XIX веке, когда предмет топологии ограничивался множествами в евклидовом пространстве, Ф. Клейн определил топологию как часть геометрии, изучающую свойства фигур, сохраняющиеся при гомеоморфизмах. Это ставило ее в один ряд с другими разделами геометрии, такими как евклидова, гиперболическая, круговая, проективная, аффинная и сферическая. Их задача, по Клейну, состояла в изучении тех свойств фигур, которые сохраняются соответственно при движениях евклидова и неевклидова пространства и круговых, проективных, аффинных и сферических преобразованиях.