Глава II

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

§ 1. Связность

Определение. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. В противном случае оно называется *несвязным*. Таким образом, пространство X несвязно, если в нем найдутся два непустых открытых множества U и V, которые не пересекаются, а в объединении дают все пространство X (рис. 5):

$$U,\ V \in \Omega_X, \qquad U \cap V = \varnothing, \qquad U \cup V = X.$$

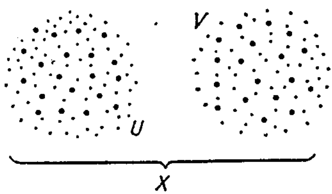

Рис. 5

Можно сказать, что связное пространство «состоит из одного цельного куска» [1].

Поскольку, очевидно, разбиение на два непустых открытых множества одновременно является разбиением на два непустых замкнутых множества, то связность можно переформулировать в терминах замкнутых множеств:

Пространство связно тогда и только тогда, когда его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества.

Так как дополнение к множеству непусто тогда и только тогда, когда само множество не совпадает со всем пространством, а дополнение к открытому множеству замкнуто, то мы получаем еще одно полезное определение связности:

Пространство X связно в том и только в том случае, когда в нем имеется только два открыто-замкнутых множества: все пространство X и пустое множество $\varnothing$.

Примеры. 1. Любое антидискретное пространство связно.

[1]) Ср.: связное изложение чего-либо, связный рассказ. Не путать со словом «связанный»!

2. Дискретное пространство, в котором больше одной точки, несвязно.

3. *Вещественная прямая* $\mathbf{R}$ *связна* (см. ниже следствие из теоремы 2).

Определение. Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если оно связно в индуцированной топологии как подпространство т. е. если топологическое пространство (A, Ω_A) связно.

Другими словами, множество A в топологическом пространстве X связно, если его нельзя покрыть двумя открытыми в X множествами U и V так, чтобы каждое из них пересекалось с множеством A, а пересечение всех трех множеств U, V и A было пусто:

$$U, V \in \Omega_X, \quad U \cap A \neq \varnothing, \quad V \cap A \neq \varnothing, \quad U \cap V \cap A = \varnothing.$$

Примеры. 1. Любое множество в антидискретном пространстве связно.

2. Любое множество в дискретном пространстве, состоящее по крайней мере из двух точек, несвязно.

3. *Интервал* $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ *связен.* (Доказательство будет дано ниже.)

4. Следующие множества несвязны в $\mathbf{R}$: $[0, 1) \cup [2, 3]$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, любое конечное множество. Вообще, если множество $A \subset \mathbf{R}$ содержит точки a и b, но не содержит некоторой промежуточной точки c: $a < c < b$, то оно несвязно. Достаточно положить $U = (-\infty, c)$, $V = (c, +\infty)$. Таким образом, *если множество в* $\mathbf{R}$ *не является интервалом, оно несвязно.* (Напомним, что *интервалом* называется подмножество прямой $\mathbf{R}$, которое с каждыми своими двумя точками содержит все промежуточные точки. Бывают открытые интервалы, или *промежутки*, конечные вида (a, b) и бесконечные вида $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, замкнутые интервалы, или *отрезки (сегменты)*, вида $[a, b]$ и *полуоткрытые* интервалы вида $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$. Для полноты к интервалам следует отнести еще пустое множество $\varnothing$, точки — одноточечные множества и всю прямую $(-\infty, \infty)$.)

Критерий связности. Достаточный запас связных множеств в топологическом пространстве иногда позволяет судить и о связности всего пространства.

Теорема 1 (критерий связности). *Для того чтобы топологическое пространство было связно, необходимо* *и достаточно, чтобы каждые две его точки содержались в некотором связном множестве.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность. Пусть X — топологическое пространство, каждые две точки которого лежат в некотором связном множестве. Предположим, что пространство X несвязно: $X = U \cup V$, где U и V — непустые открытые множества, пересечение которых пусто:

$$U \neq \varnothing, \quad V \neq \varnothing, \quad U \cap V = \varnothing.$$

Выберем в этих множествах по точке: пусть $a \in U$, $b \in V$. Пусть $K \subset X$ — связное множество, содержащее выбранные точки a и b. Тогда множества U и V покрывают, очевидно, множество K, их пересечения с K непусты, а пересечения всех трех множеств U, V и K пусто: $U \cap V \cap K \subset U \cap V = \varnothing$. Мы получили противоречие со связностью множества K. Теорема 1 доказана. □

Связность интервалов. Применим полученный критерий связности к вопросу о связных множествах на прямой.

Лемма. *Всякий отрезок $[a, b]$ связен.*

Доказательство. Пусть отрезок разбит на два открытых в нем множества: $[a, b] = A \cup B$. Докажем, что если, например, $a \in A$, то множество B пусто. Для этого рассмотрим правый конец α самого большого полуоткрытого интервала $[a, \alpha)$, содержащегося в множестве A. Поскольку множество B открыто, то нетрудно видеть, что $\alpha \notin B$. Следовательно, $\alpha \in A$. Но это означает в силу открытости множества A, что $\alpha = b$ и $A = [a, b]$, а $B = \varnothing$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Подмножество A числовой прямой связно в том и только в том случае, когда A — интервал.*

Доказательство. Необходимость этого условия нам уже известна. Чтобы доказать его достаточность, воспользуемся критерием связности и леммой. Действительно, если A — интервал, то каждые две его точки a, b содержатся в связном множестве $[a, b]$.

Следствие. *Вещественная прямая* $\mathbb{R}$ *связна.* □

Связные множества. Рассмотрим теперь некоторые свойства связных множеств.

Теорема 3. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Рассмотрим в топологическом пространстве X связное множество A. Предположим, что его замыкание $\mathrm{cl}\, A$ несвязно. Пусть $\mathrm{cl}\, A \subset U \cup V$, где U и V — открытые множества, которые имеют непустые пересечения с множеством $\mathrm{cl}\, A$, причем пересечение всех трех множеств U, V и $\mathrm{cl}\, A$ пусто:

$$U \cap \mathrm{cl}\, A \neq \varnothing, \quad V \cap \mathrm{cl}\, A \neq \varnothing, \quad U \cap V \cap \mathrm{cl}\, A = \varnothing.$$

Так как множество A связно, то его пересечение с одним из двух множеств U и V пусто. Пусть, например, $U \cap A = \varnothing$. Это значит, что множество A содержится в *замкнутом* множестве $X \setminus U$. Но тогда и его замыкание $\mathrm{cl}\, A$ тоже содержится в $X \setminus U$, т. е. $\mathrm{cl}\, A \cap U = \varnothing$. Полученное противоречие и доказывает теорему 3. □

Теорема 4. *Объединение двух связных множеств, имеющих по крайней мере одну общую точку, связно.*

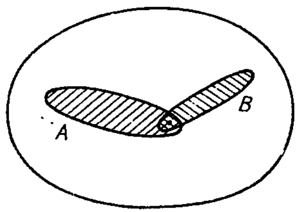

Рис. 6

Доказательство. Пусть A, B — связные подмножества топологического пространства X, имеющие непустое пересечение: $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 6). Предположим, что их объединение $C = A \cup B$ несвязно. Это значит, что $C \subset U \cup V$, где U и V — открытые множества, имеющие общие точки с множеством C, причем пересечение всех трех множеств U, V и C пусто:

$$U \cap C \neq \varnothing, \quad V \cap C \neq \varnothing, \quad U \cap V \cap C = \varnothing.$$

Тогда из связности множеств A и B следует, что каждое из них целиком содержится в одном из множеств U и V и не пересекается с другим (для проверки вернитесь к определению связного множества). Но пусть, например, $A \subset U$. Если теперь $B \subset U$, то $C \cap V = \varnothing$, а если $B \subset V$, то $A \cap B \subset U \cap V \cap C = \varnothing$. В обоих случаях получаем противоречие. Теорема 4 доказана. □

Эту теорему теперь ничего не стоит обобщить на случай произвольного семейства связных множеств, имеющих непустое пересечение.

Теорема 5. *Объединение семейства связных множеств, имеющих общую точку, само связно.*

Доказательство. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство связных множеств в топологическом пространстве X, а точка x_0 — общая для всех множеств A_α: $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Согласно нашему критерию связности, для доказательства связности множества $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ достаточно указать для двух его точек a и b содержащее обе эти точки связное подмножество множества $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Если, например, $a \in A_\alpha$ и $b \in A_\beta$ для некоторых индексов $\alpha, \beta \in I$, то таким множеством будет множество $A_\alpha \cup A_\beta$. Его связность следует из предыдущей теоремы, поскольку множества A_α и A_β оба связны и имеют общую точку x_0. □

Компоненты топологического пространства. Особый интерес представляют *максимальные* связные подмножества топологического пространства. Для них существует специальное название (и даже несколько).

Определение. *Компонентой связности* пространства X называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком строго большем связном подмножестве пространства X.

Теорема 6. *Две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Объединение двух пересекающихся компонент по-доказанному есть связное множество, которое к тому же содержит обе эти компоненты. По определению, компоненты должны совпадать с ним и, значит, друг с другом. □

Теорема 7. *Каждая точка содержится в некоторой компоненте связности пространства.*

Доказательство. Достаточно заметить, что среди всех связных множеств, содержащих данную точку, существует наибольшее: это объединение всех таких множеств. Оно связно в силу доказанной выше теоремы 5. □

Эти две теоремы в совокупности означают, что всякое топологическое пространство является объединением своих попарно непересекающихся компонент связности. Другими словами, компоненты связности образуют *разбиение* пространства. Компоненты связности пространства называются также его *связными компонентами* или просто *компонентами*.

Теорема 8. *Компонента связности является замкнутым множеством.*

Доказательство. Замыкание компоненты связности есть связное множество, содержащее эту компоненту. По определению, компонента должна совпадать с ним. Следовательно, она замкнута. □

Примеры. 1. У антидискретного пространства, как и у любого связного пространства, всего одна компонента связности — все пространство.

2. В дискретном пространстве каждое одноточечное подмножество образует отдельную компоненту.

3. В множестве рациональных чисел **Q**, лежащем на вещественной прямой, каждая точка образует отдельную компоненту. Это, кстати, пример того, когда компоненты не открыты.

Связность и непрерывные отображения. Вернемся к связным пространствам. Представляется естественным, что поскольку понятие связности определяется чисто в топологических терминах, то связность должна быть топологическим свойством. Мы докажем сейчас гораздо более сильное утверждение.

Теорема 9. *Непрерывный образ связного пространства связен. Другими словами, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и пространство X связно, то множество $f(X)$ тоже связно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть множество $f(X)$ несвязно: $f(X) \subset U \cup V$, где U и V — открытые множества в Y, которые имеют непустые пересечения с множеством $f(X)$, причем пересечение всех трех множеств U, V и $f(X)$ пусто:

$$U \cap f(X) \neq \varnothing, \qquad V \cap f(X) \neq \varnothing, \qquad U \cap V \cap f(X) = \varnothing.$$

Это значит, что $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ и $f^{-1}(U \cap V) = \varnothing$. В силу непрерывности отображения f множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ открыты, а из того, что $f(X) \subset U \cup V$, следует, что $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$. Таким образом, мы получили разбиение пространства X на два непустых открытых множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, в противоречие со связностью пространства X. Теорема 9 доказана. □

Следствие. *Топологическое пространство, гомеоморфное связному пространству, само является* *связным. Таким образом, связность является топологическим свойством.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм и пространство X связно. Тогда пространство Y связно, как образ связного пространства X при непрерывном отображении f. □

Замечание. Разумеется, поскольку понятие связности определялось в чисто топологических терминах — на языке открытых множеств, — то оно является топологическим. А так как гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между топологическими структурами двух пространств, то связность должна сохраняться при гомеоморфизмах, т. е. она является топологическим свойством. Для того читателя, которому все это уже понятно, доказательство предыдущего следствия не нужно. Но, заметим, наше «очевидное» объяснение занимает больше места, чем упомянутое доказательство! (Это тот случай, когда «по длинной дороге езды три дня, а по короткой — и за месяц не доедешь».) В подобной ситуации мы еще не раз окажемся на протяжении этой главы.