§ 2. Линейная связность

Несмотря на то, что определение связности очень просто, его непосредственная проверка в конкретных случаях, например, для множеств в евклидовом пространстве, несколько затруднительна. На помощь приходит другое, более сильное, но проще проверяемое топологическое свойство — линейная связность.

Путь. Прежде всего дадим определение пути в топологическом пространстве.

Путем s в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $s\colon [0, 1] \to X$ отрезка $[0, 1]$ в пространство X. Точка $a = s(0)$ называется *началом* пути s, а точка $b = s(1)$ — его *концом*. Говорят также, что путь s *соединяет* точки a и b [1]) (рис. 7).

Определение. Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем.

---

[1]) Отметим некоторую разницу с привычным употреблением слова «путь». Обычно под путем понимают дорогу, а мы имеем в виду скорее *движение* по этой дороге, т. е. прохождение пути.

Примеры. 1. Всякое антидискретное пространство линейно связно.

2. Дискретное пространство, в котором больше одной точки, линейно несвязно.

3. *Евклидово пространство* $\mathbf{R}^n$ *линейно связно*: любые две точки $a, b \in \mathbf{R}^n$ можно соединить равномерным прямолинейным путем (т. е. воспользоваться

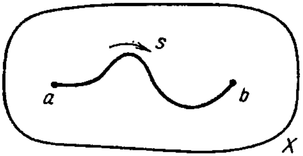

Рис. 7

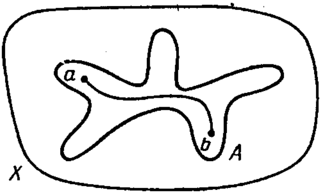

Рис. 8

хорошо известной нам параметризацией отрезка) $s\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^n$, $s(t) = (1-t)a + tb$.

Определение. Множество A в топологическом пространстве X называется *линейно связным*, если оно линейно связно в индуцированной топологии как подпространство, т. е. если топологическое пространство (A, Ω_A) линейно связно.

Поскольку отображение в подпространство непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция этого отображения с включением подпространства A в пространство X, то мы видим, что *множество A в топологическом пространстве X линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки $a, b \in A$ можно соединить путем $s\colon [0, 1] \to X$, целиком лежащим в A* (т. е. $s(t) \in A$ для любого $t \in [0, 1]$) (рис. 8).

Линейную связность различных множеств часто нетрудно проверить непосредственно.

Примеры. 1. Любой интервал на прямой линейно связен.

2. Всякое выпуклое множество в евклидовом пространстве линейно связно. В частности, любой шар D^n линейно связен.

Свойства путей. Линейная связность во многом аналогична связности (это видно уже из названия этих свойств). Поэтому неудивительно, что свойства линейно связных множеств очень похожи на свойства связных множеств. Для доказательства этих свойств нам потребуются следующие простейшие свойства путей.

Если точку a можно соединить путем s с точкой b, то и, наоборот, точку b можно соединить с точкой a. Это можно сделать при помощи пути, *обратного* пути s. Он обозначается через s^{-1} и определяется формулой [1])

$$s^{-1}(t) = s(1-t).$$

Можно сказать, что обратный путь s^{-1} состоит в прохождении пути s в обратном направлении (рис. 9).

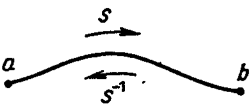

Рис. 9

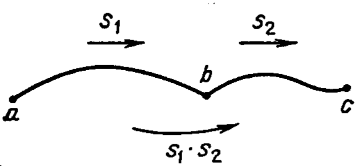

Рис. 10

Если точку a можно соединить путем s_1 с точкой b, а точку b — путем s_2 с точкой c, то точку a можно соединить путем с точкой c. Это можно сделать при помощи *произведения путей* s_1 и s_2. Произведение путей обозначается через $s_1 \cdot s_2$ и определяется формулой

$$s_1 \cdot s_2(t) = \begin{cases} s_1(2t), & \text{если } t \leqslant \frac{1}{2}, \\ s_2(2t-1), & \text{если } t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Можно сказать, что путь $s_1 \cdot s_2$ состоит из двух половин — путей s_1 и s_2, каждый из которых проходится с удвоенной скоростью (рис. 10).

Теорема 1. *Объединение семейства линейно связных множеств, имеющих общую точку, само линейно связно.*

---

[1]) Название «обратный путь» и обозначение s^{-1} несколько двусмысленны, поскольку путь — это отображение, а обратный путь обратным отображением не является. Мы надеемся, что это не вызовет недоразумений.

Доказательство. Хотя это утверждение и достаточно очевидно, мы его докажем во всех деталях.

Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство линейно связных множеств в топологическом пространстве X, а точка x_0 — общая для всех множеств A_α: $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Как мы знаем, чтобы доказать линейную связность множества $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, нужно для произвольных двух его точек a и b указать соединяющий их путь, который лежал бы в этом множестве. Если, например, $a \in A_\alpha$ и $b \in A_\beta$ для некоторых индексов α, $\beta \in I$, то в силу линейной связности множеств A_α и A_β точку a можно соединить в A_α с точкой x_0 некоторым путем s_1, а точку x_0 можно соединить в A_β с точкой b некоторым путем s_2. Тогда путь $s_1 \cdot s_2$, лежащий в $A_\alpha \cup A_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, соединяет точку a с точкой b и является искомым (рис. 11). □

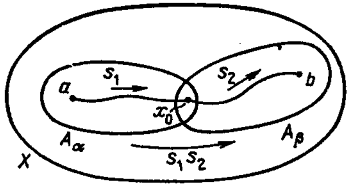

Рис. 11

Компоненты линейной связности топологического пространства. Особый интерес представляют максимальные линейно связные подмножества топологического пространства. Для них имеется специальное название.

Компонентой линейной связности пространства X называется всякое его линейно связное подмножество, не содержащееся ни в каком строго большем линейно связном подмножестве пространства X.

Теорема 2. *Две компоненты линейной связности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Объединение двух пересекающихся компонент линейной связности, в силу теоремы 1, есть линейно связное множество, которое к тому же содержит обе исходные компоненты. По определению, они должны совпадать с этим множеством и, значит, друг с другом. □

Теорема 3. *Каждая точка пространства содержится в некоторой его компоненте линейной связности.*

Доказательство. Достаточно заметить, что среди всех линейно связных множеств, которые содержат данную точку, имеется наибольшее: им является объединение всех этих множеств. Оно линейно связно в силу доказанной ранее теоремы 1. □

Теоремы 2, 3 означают в совокупности, что всякое топологическое пространство является объединением своих попарно непересекающихся компонент линейной связности. Другое название для компонент линейной связности — *линейно связные компоненты*.

Линейная связность и отображения. Вернемся к линейно связным пространствам. Нетрудно убедиться, что линейная связность — топологическое свойство. Это естественно, поскольку она определяется чисто в топологических терминах. Мы получим это в качестве следствия из некоторого более сильного утверждения.

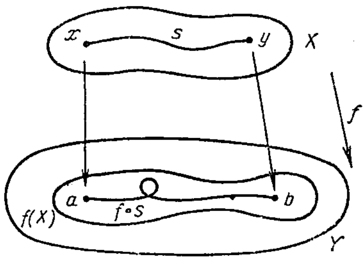

Рис. 12

Теорема 4. *Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен. То есть если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение и пространство X линейно связно, то и множество $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Докажем, что две произвольные точки a, $b \in f(X)$ можно соединить в $f(X)$ путем. Пусть $a = f(x)$, $b = f(y)$, где x, $y \in X$. Тогда если s — путь, соединяющий в X точки x и y, то путь $f \circ s$, соединяющий, очевидно, точки a и b, искомый (рис. 12). □

Пример. Окружность S^1 линейно связна, поскольку она является образом отрезка $[0, 2\pi]$ при стандартной параметризации f: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$,

Следствие. *Топологическое пространство, гомеоморфное линейно связному пространству, само является линейно связным. Таким образом, линейная связность есть топологическое свойство.*

Доказательство. Если f: $X \to Y$ есть гомеоморфизм линейно связного пространства X на пространство Y, то пространство Y линейно связно, как образ линейно связного пространства X при непрерывном отображении f. □

Связность и линейная связность. Выясним теперь соотношение между связностью и линейной связностью.

Теорема 5. *Линейно связное топологическое пространство связно.*

Доказательство. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Чтобы доказать, что оно связно, воспользуемся критерием связности. Для этого нужно для произвольных точек a, $b \in X$ найти содержащее их связное множество. Если s: $[0, 1] \to X$ — путь, соединяющий точки a и b, то таким множеством будет множество $s([0, 1])$ — «траектория» пути s, — которое связно как образ связного пространства $[0, 1]$ при непрерывном отображении s. □

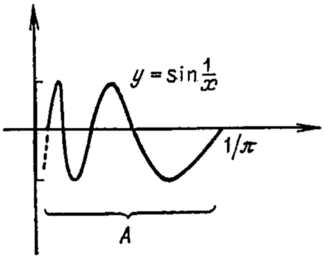

Рис. 13

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: существуют связные, но не линейно связные пространства.

Пример. Рассмотрим непрерывную функцию f: $\left(0, \frac{1}{\pi}\right] \to \mathbf{R}$, заданную формулой $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Пусть $A \subset \mathbf{R}^2$ — ее график. Множество A связно и даже линейно связно. Поэтому его замыкание $\operatorname{cl} A$ (рис. 13) тоже связно. Но нетрудно видеть, что *оно — это замыкание — не линейно связно*: точки отрезка $\operatorname{cl} A \setminus A$ нельзя соединить путем с точками из A (наглядно это довольно очевидно, но мы не будем этого доказывать, а оставим читателю в качестве не очень трудного упражнения).

Заметим, что попутно мы получили пример линейно связного множества, замыкание которого уже не линейно связно. Это еще одно различие между связностью и линейной связностью.

Критерий линейной связности. Бросается в глаза некоторая экзотичность приведенного примера (для пространства $X = \operatorname{cl} A$ есть даже специальное название — «польский отрезок»). Это не случайно.

Во многих важных ситуациях связность и линейная связность равносильны. Например, поскольку все интервалы на прямой линейно связны, а все остальные подмножества прямой несвязны, то для подмножеств прямой эти свойства равносильны. Еще более широкий критерий линейной связности связных пространств и множеств дается пунктом в) следующей теоремы (пункты а) и б) понадобятся нам в § 1 гл. III).

Теорема 6. *Пусть в топологическом пространстве X каждая точка обладает линейно связной окрестностью. Тогда*

а) *компоненты пространства X являются одновременно его линейно связными компонентами;*

б) *компоненты пространства X открыты в нем;*

в) *если пространство X связно, то оно и линейно связно.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Всякая линейно связная компонента L пространства X открыта.*

Действительно, все точки множества L внутренние, поскольку с каждой своей точкой множество L содержит ее линейно связную окрестность. □

Доказательство теоремы 6. Начнем с пунктов а) и б). Каждая компонента C пространства X очевидным образом разбивается на линейно связные компоненты. Все они, в силу леммы, открыты. Следовательно, компонента C также открыта, и пункт б) доказан.

Далее, если бы этих линейно связных компонент было больше одной, то мы получили бы противоречие со связностью компоненты C. Следовательно, в разбиении участвует только одна линейно связная компонента L, и она, очевидно, совпадает со всей компонентой C. Этим доказан пункт а).

Пункт в) легко следует из пункта а). Если пространство X связно, то X является (единственной) своей компонентой. Тогда в силу пункта а) пространство X является также своей линейно связной компонентой и, следовательно, линейно связно. Теорема 6 полностью доказана. □

Следствие 1. *Для открытых множеств в евклидовом пространстве связность и линейная связность равносильны.*

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$ — произвольное связное открытое множество. Чтобы доказать его линейную связность, достаточно, в силу теоремы 6, у каждой его точки найти линейно связную окрестность. Такой окрестностью будет, например, любая достаточно малая шаровая окрестность этой точки. □

Напомним, открытое связное множество в евклидовом пространстве называется *областью* (рис. 14).

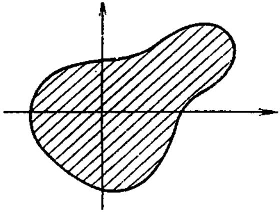

Рис. 14

Следствие 2. *Открытое множество в евклидовом пространстве имеет не более чем счетное число компонент.*

Доказательство в качестве упражнения. (Надо воспользоваться, например, тем, что в каждой компоненте должна содержаться точка, у которой все координаты — рациональные числа, а всего таких точек — счетное число.) □