§ 3. Хаусдорфовость

В определении топологического пространства участвуют три аксиомы. Их уже достаточно для довольно содержательной теории. Но запас топологических пространств очень велик. Важнейшие из них — метризуемые — составляют лишь небольшую часть этого запаса. Поэтому часто ограничиваются рассмотрением пространств, удовлетворяющих различным дополнительным требованиям. Среди таких требований одно из важнейших — аксиома Хаусдорфа (иногда ее даже включают в число аксиом топологической структуры).

Определение. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями. Таким образом, если X — хаусдорфово топологическое пространство, то для любых двух точек $a, b \in X$, $a \neq b$, найдутся такие множества U, $V \in \Omega_X$, что $a \in U$, $b \in V$, и $U \cap V = \varnothing$ (рис. 15). (Окрестности U и V *отделяют* точки a и b друг от друга. Поэтому аксиому Хаусдорфа относят к числу *аксиом отде-*

лимости: другое ее название — вторая аксиома отделимости или аксиома T_2.)

Примеры. 1. Антидискретное пространство, в котором больше одной точки, не хаусдорфово.

2. Дискретное пространство хаусдорфово.

3. Всякое метрическое пространство M хаусдорфово. Если a, $b \in M$ — две его точки, то в качестве отделяющих окрестностей можно взять шаровые окрестности радиусом $\frac{1}{2}$ dist (a, b).

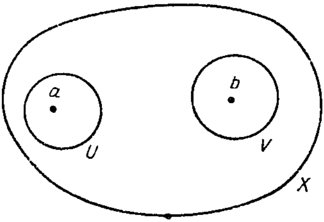

Рис. 15

Первые следствия из аксиомы Хаусдорфа. Из хаусдорфовости следуют некоторые очень естественные свойства топологического пространства.

Теорема 1 (замкнутость точек). *В хаусдорфовом топологическом пространстве X одноточечные подмножества замкнуты.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Чтобы доказать, что множество $\{x_0\}$ замкнуто, достаточно проверить, что его дополнение $X \setminus \{x_0\}$ открыто. Действительно, любая точка $y \in X \setminus \{x_0\}$ обладает окрестностью V, не содержащей точки x_0 (в силу хаусдорфовости пространства X), и, следовательно, является внутренней для множества $X \setminus \{x_0\}$. □

Следствие. *В хаусдорфовом пространстве конечные множества замкнуты.*

Доказательство. Очевидно. □

Пределы последовательностей. Другое важное следствие хаусдорфовости касается сходящихся последовательностей.

Определение. Пусть в топологическом пространстве X дана последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Точка a называется (*топологическим*) *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любой окрестности U точки a найдется такой номер N, что если $n > N$, то $a_n \in U$. В таком случае говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходится* к точке a.

Примеры. 1. В антидискретном пространстве любая последовательность сходится к любой точке.

2. Чтобы последовательность $\{a_n\}$ в дискретном пространстве сходилась к точке a, нужно чтобы все ее члены, начиная с некоторого, совпадали с точкой a.

Как обычно, дискретное и антидискретное пространства демонстрируют две крайности. Вообще же, во многих случаях при помощи пределов можно описать большинство топологических явлений, таких, как открытость и замкнутость множеств, непрерывность отображений и др. Мы не будем этим заниматься, а ограничимся доказательством следующей теоремы.

Теорема 2 (единственность предела). *В хаусдорфовом пространстве X последовательность $\{a_n\}$ имеет не более одного предела.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть a и b — пределы последовательности $\{a_n\}$, а U и V — их непересекающиеся окрестности. Тогда, начиная с некоторого достаточно большого номера N, все члены последовательности $\{a_n\}$ будут лежать в U и в V, что, очевидно, невозможно. □

Наследственные топологические свойства. Нетрудно показать, что хаусдорфовость «передается по наследству» от пространства ко всем его подпространствам.

Теорема 3. *Подпространство A хаусдорфова пространства X само является хаусдорфовым.*

Доказательство. Если $a, b \in A$ — две различные точки, а $U, V \subset \subset X$ — их непересекающиеся окрестности в пространстве X, то множества $U \cap A$ и $V \cap A$ будут непересекающимися окрестностями этих же точек в подпространстве A (рис. 16). □

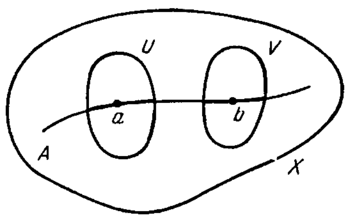

Рис. 16

Топологические свойства, которые передаются таким образом от пространства к его подпространствам, называются *наследственными*.

Пример. Конечность, счетность и метризуемость — наследственные свойства, в отличие, например, от связности и линейной связности.