§ 4. Компактность

Определение. Топологическое пространство называется *компактным*, если всякое покрытие этого пространства открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Покрытия открытыми множествами будем в дальнейшем называть *открытыми*.

Пусть X — топологическое пространство, а $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — некоторое его открытое покрытие: $U_\alpha\in\Omega_X$, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha = X$. Тогда наше определение означает, что если пространство X компактно, то среди множеств U_α найдутся несколько множеств: U_{α_1}, U_{α_2}, … …, U_{α_k} (для некоторого $k\in\mathbf{N}$), уже покрывающих его: $X=\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$. Множества $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ и образуют конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Очевидно, для того чтобы пространство не было компактным, у него должно существовать открытое покрытие (заведомо бесконечное), никакая конечная часть которого не является покрытием.

Примеры. 1. Всякое антидискретное пространство компактно.

2. Всякое конечное топологическое пространство компактно.

3. Вообще, всякое пространство, в котором конечное число открытых множеств, компактно.

4. Дискретное пространство с бесконечным числом точек не компактно.

Пример открытого покрытия, не обладающего конечным подпокрытием, дается покрытием одноточечными множествами.

5. Числовая прямая $\mathbf{R}$ не компактна.

Конечным подпокрытием не обладает покрытие всевозможными открытыми промежутками вида (a, b), a, $b\in\mathbf{R}$. Другой пример — покрытие лучами вида $(a, +\infty)$, где $a\in\mathbf{R}$.

С другой стороны, покрытие всеми открытыми лучами $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ заведомо содержит конечное подпокрытие: $(-\infty, 1)\cup(0, +\infty)=\mathbf{R}$.

Определение. Множество A в топологическом пространстве X называется *компактным*, если оно компактно в индуцированной топологии, как подпространство, т. е. если топологическое пространство (A, Ω_A) компактно.

Теорема 1. *Подмножество A топологического пространства X компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия множествами, открытыми в X, можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Начнем с необходимости этого условия. Пусть множество A компактно, а $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — произвольное его покрытие открытыми в пространстве X множествами: $A\subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, $U_\alpha\in\Omega_X$. Выделим в покрытии $\{U_\alpha\}$ конечное подпокрытие. Для этого рассмотрим пересечения множеств U_α с множеством A: положим $V_\alpha = U_\alpha \cap A$. Множества V_α открыты в подпространстве A и, очевидно, образуют его покрытие: $A = A\cap \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha$. В силу компактности множества A, из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ можно выделить некоторое конечное подпокрытие $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$. Но тогда множества $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$, очевидно, образуют искомое подпокрытие исходного покрытия множества A: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$.

Достаточность доказывается аналогично. □

Компактность и замкнутость. Рассмотрим некоторые свойства компактных множеств и пространств.

Теорема 2. *Замкнутое подмножество A компактного пространства X компактно.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно из произвольного покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ множества A открытыми в X множествами выбрать конечное подпокрытие. Для этого добавим к этим множествам открытое множество $X\setminus A$ и получим открытое покрытие всего пространства X. В силу компактности пространства X, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, причем мы всегда можем считать, что в это подпокрытие входит множество $X\setminus A$. Пусть, например,

$$X = U_{\alpha_1}\cup\ldots U_{\alpha_k}\cup(X\setminus A).$$

Очевидно, что множества $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ образуют искомое конечное подпокрытие множества A. □

Однако из компактности множества его замкнутость, вообще говоря, не следует (достаточно вспомнить об антидискретном пространстве, где компактны все множества, а замкнутых — только два). Чтобы это выполнялось, достаточно потребовать хаусдорфовости пространства.

Теорема 3. *Компактное подмножество A хаусдорфова пространства X замкнуто.*

Доказательство. Докажем, что $X \setminus A$ открыто. Для этого достаточно найти для произвольной точки x_0 из дополнения к множеству A окрестность, которая не пересекалась бы с множеством A. В силу хаусдорфовости пространства X у каждой точки $x \in A$ найдется окрестность U_x, не пересекающаяся с некоторой окрестностью V_x точки x_0 (рис. 17).

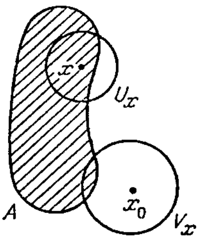

Рис. 17

Всевозможные окрестности U_x, очевидно, образуют открытое покрытие множества A: $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} U_x$.

В силу компактности множества A у этого покрытия найдется некоторое конечное подпокрытие: $A \subset \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$ для каких-то точек $x_1, \ldots, x_k \in A$. Теперь в качестве искомой окрестности точки x_0 можно взять открытое множество $V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_k}$; оно не пересекается не только с множеством A, но даже с бо́льшим множеством $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. (Действительно, пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{x_i}$ — произвольная точка. Так как она принадлежит каждому из множеств $V_{x_1}, \ldots$ $\ldots, V_{x_k}$, то она не принадлежит ни одному из множеств $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Значит, она не принадлежит и их объединению.) □

Следствие. *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предыдущей теоремой и тем, что всякое метрическое пространство хаусдорфово. □

Компактные множества в метрических пространствах, кроме замкнутости, обладают многими другими специфическими свойствами.

Теорема 4. *Компактное множество A в метрическом пространстве M ограничено.*

Доказательство. Нам нужно указать шар, целиком содержащий множество A. Пусть $a \in M$ — произвольная точка. Всевозможные открытые шары $B_a(r)$ с центром в этой точке образуют, очевидно, открытое покрытие всего пространства M и, в частности, множества A. Так как множество A компактно, то у этого покрытия найдется конечное подпокрытие. Пусть, например, $A \subset B_a(r_1) \cup \ldots \cup B_a(r_k)$ для некоторых $r_1, \ldots, r_k > 0$. Тогда в качестве искомого шара можно взять наибольший из шаров $B_a(r_i)$: ясно, что $A \subset B_a(R)$, где $R = \max(r_1, \ldots, r_k)$.

Таким образом, *в метрическом пространстве компактные множества замкнуты и ограничены.*

В качестве следствия получаем одно важное свойство компактных множеств на числовой прямой.

Теорема 5. *Компактное подмножество A числовой прямой* **R** *содержит свои точные верхнюю и нижнюю грани.*

Доказательство. Так как множество A компактно, то оно ограничено и обладает конечной точной верхней гранью c: $c = \sup A = \sup\limits_{x \in A} x \in \mathbf{R}$. Числа, меньшие числа c, верхней гранью для множества A уже не будут. Это значит, что в сколь угодно малой окрестности точки c имеются точки множества A. Следовательно, точка c является точкой прикосновения множества A. Так как множество A компактно, то оно замкнуто и должно содержать точку c.

Аналогично доказывается, что множество A содержит свою точную нижнюю грань. $\square$

Компактные множества в евклидовом пространстве. По-доказанному, все они замкнуты и ограничены. (Этим и объясняется название «компактное» множество.) Оказывается, верно и обратное: из замкнутости и ограниченности множества в евклидовом пространстве следует его компактность. Для доказательства нам потребуется важный частный случай этого утверждения — компактность куба.

Теорема 6. *n-мерный куб в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ компактен.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты изложения случай плоскости: $n = 2$. Пусть K_0 —

единичный квадрат. Докажем от противного, что множество K_0 компактно. Если это не так, то найдется такое открытое покрытие Γ квадрата K_0, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Разобьем квадрат K_0 на четыре квадрата со стороной 1/2. По крайней мере один из них не может быть покрыт конечным числом множеств из покрытия Γ (в противном случае мы нашли бы для каждого из этих квадратов конечное подпокрытие покрытия Γ, и в совокупности эти подпокрытия дали бы конечное покрытие квадрата K_0). Обозначим квадрат, для которого из покрытия Γ нельзя выделить конечное покрытие, через K_1. Разделим и его на четыре квадрата, уже со стороной 1/4. Тот квадрат, для которого из Γ нельзя выделить конечное подпокрытие, обозначим через K_2. Повторяя эту процедуру, мы получим бесконечную последовательность вложенных квадратов K_0, K_1, K_2, ..., каждый следующий из которых по размерам вдвое меньше предыдущего, и ни один из них не покрывается конечным числом множеств из Γ (рис. 18). Однако общая точка этих квадратов покрывается некоторым множеством из Γ, а с ней должны покрываться этим множеством и все квадраты K_i с достаточно большим i. (Действительно, пусть общая точка лежит в открытом множестве U из Γ вместе со своей ε-окрестностью, где, скажем, $\varepsilon > 1/2^k$. Тогда все квадраты K_i с $i > k$ лежат в этой ε-окрестности и тем более — в множестве U.) Противоречие. □

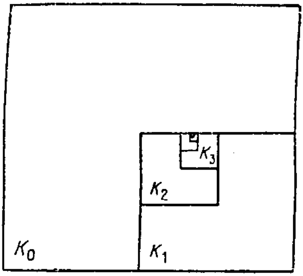

Рис. 18

Следствие. (Критерий компактности в евклидовом пространстве.) *Для того чтобы множество A в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость этих условий нам уже известна. Докажем их достаточность. Так как множество A ограничено, то оно содержится в некотором кубе. А поскольку всякий куб в евклидовом пространстве компактен, то множество A компактно как замкнутое подмножество компактного пространства. □

Примеры. Шары и сферы в евклидовом пространстве компактны.

Компактность и отображения. Вернемся к компактным пространствам. Нетрудно убедиться, что компактность пространства является его топологическим свойством. Имеет место даже более сильное утверждение.

Теорема 7. *Непрерывный образ компактного пространства компактен, т. е. если* $f\colon X \to Y$ — *непрерывное отображение и пространство* X *компактно, то и множество* $f(X)$ *компактно.*

Доказательство. Если открытые множества U_α, $\alpha \in I$, покрывают множество $f(X)$, то их прообразы множества $f^{-1}(U_\alpha)$, покрывают пространство X. В силу непрерывности отображения f это покрытие открыто. Следовательно, из него можно выделить конечное подпокрытие. Пусть, например, $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k})$. Но тогда, очевидно, $f(X) \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$, и множества U_{α_i}, $i = 1, \ldots, k$, образуют искомое конечное подпокрытие исходного покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. □

Следствие. *Топологическое пространство, гомеоморфное компактному пространству, само является компактным. Таким образом, компактность является топологическим свойством.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм и пространство X компактно. Тогда пространство Y компактно, как образ компактного пространства X при непрерывном отображении f. □

Попутно мы получаем еще одно следствие из доказанной теоремы. Оно выражает важнейшее свойство компактных пространств и множеств, исключительно полезное при доказательстве различных теорем существования.

Теорема 8. *Непрерывная числовая функция на компактном пространстве ограничена и обладает наибольшим и наименьшим значениями. Другими словами, если* $f\colon X \to \mathbf{R}$ — *непрерывная функция и пространство* X *компактно, то найдутся две такие точки* $x_1, x_2 \in X$, *что* $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ *для любой точки* $x \in X$.

Доказательство. Множество $f(X)$ компактно как образ компактного пространства X при непрерывном отображении f. Следовательно, оно содержит свои точные нижнюю и верхнюю грани $\inf(f(X)) = a$ и $\sup(f(X)) = b$.

Пусть $a = f(x_1)$ и $b = f(x_2)$. Тогда, очевидно, точки x_1 и x_2 — искомые. Теорема 8 доказана. □

Критерий гомеоморфизма. Следующая наша цель состоит в доказательстве важного критерия того, когда непрерывное отображение является гомеоморфизмом. Сначала дадим одно определение.

Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если при этом отображении образы замкнутых множеств замкнуты. Ясно, что всякий гомеоморфизм есть замкнутое отображение, и наоборот, если непрерывное обратимое отображение замкнуто, то это гомеоморфизм.

Теорема 9. *Непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово всегда замкнуто. Другими словами, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, пространство X компактно, а пространство Y хаусдорфово, то для любого замкнутого множества $A \subset X$ множество $f(A) \subset Y$ замкнуто.* □

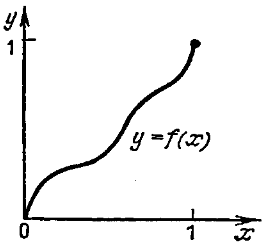

Рис. 19

Доказательство. Эта теорема немедленно следует из трех доказанных ранее теорем. Действительно, множество A компактно как замкнутое подмножество компактного пространства X. Множество $f(A)$ компактно как образ компактного множества A при непрерывном отображении f. Наконец, множество $f(A)$ замкнуто как компактное подмножество хаусдорфова пространства Y. □

В качестве следствия мы получаем важный критерий гомеоморфизма.

Теорема 10. *Непрерывная биекция f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство. В силу теоремы 9, отображение f замкнуто, а, как отмечалось пятью абзацами выше, если непрерывная биекция замкнута, то это — гомеоморфизм. □

Пример. *Любая непрерывная биекция отрезка* $[0, 1]$ *в себя есть гомеоморфизм.* Этот факт довольно очевиден наглядно. График отображения в этом случае — кривая без разрывов (рис. 19). И она же даст нам график обратного отображения, если ее отразить относительно прямой $x = y$.