Глава III

МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Топологические многообразия с краем и без края

Понятие многообразия является одним из важнейших в математике. Интересно, что, в сущности, это понятие, а также понятия размерности и края встречаются уже у Евклида. Начнем этот параграф цитатой из Евклида («Начала», Книга I):

Определения.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же — длина без ширины.
3. Края же линии — точки.

. . . .

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Края же поверхности — линии.

Точки, линии и поверхности — все это примеры многообразий. Фактически, многообразие — это такое топологическое пространство, в окрестности каждой точки которого можно ввести систему координат. Для более точного определения нам понадобится одно весьма специфическое топологическое свойство — локальная евклидовость. Пусть n — неотрицательное целое число. Через $\mathbf{R}_+^n$ будем обозначать замкнутое полупространство в евклидовом n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$, состоящее из точек, первая координата которых неотрицательна (рис. 20):

$$\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n\colon\ x_1 \geqslant 0\}.$$

(Заметим, что $\mathbf{R}_+^0 = \mathbf{R}^0$ состоит из одной точки.)

Определение. Топологическое пространство X называется ***локально евклидовым размерности n***, если всякая его точка x_0 обладает окрестностью U, гомеоморфной n-мерному евклидову пространству $\mathbf{R}^n$ или полупространству $\mathbf{R}^n_+$ (рис. 21). Таким образом, в окрестности U точки x_0 можно ввести систему координат, в которой положение точек, близких к x_0, будет описываться n параметрами. Допуская вольность речи, можно сказать, что вблизи точки x_0 пространство X «имеет n измерений». Поскольку n-мерное

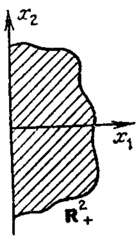

Рис. 20

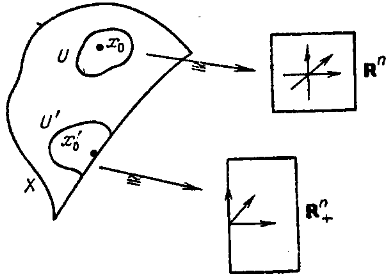

Рис. 21

евклидово пространство гомеоморфно открытому евклидову шару: $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{B}^n$, то в приведенном определении вместо $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n_+$ можно говорить об открытом шаре и полушаре или просто об открытом множестве в $\mathbf{R}^n_+$.

Примеры. 1. Топологическое пространство является локально евклидовым размерности 0 в том и только в том случае, если оно дискретно.

2. Числовая прямая $\mathbf{R}^1$, окружность S^1, луч $[0, +\infty)$, интервал $[0, 1)$, отрезок $[0, 1]$ являются одномерными локально евклидовыми.

3. Локально евклидовыми размерности n являются сами пространство $\mathbf{R}^n$ и полупространство $\mathbf{R}^n_+$, произвольные их открытые подмножества, n-мерная сфера S^n и n-мерный шар D^n, а также n-мерное проективное пространство.

4. Любое открытое подмножество n-мерного локально евклидова топологического пространства само является n-мерным локально евклидовым.

Локальная евклидовость — очень сильное требование, но само по себе оно не гарантирует выполнения других довольно естественных топологических свойств. Приведем пример, который показывает, что *локально евклидово пространство может не быть хаусдорфовым.*

Пример. Рассмотрим множество X на плоскости, состоящее из всех точек оси абсцисс и еще одной точки — например, точки с координатами $(0, 1)$, рис. 22: $X = \mathbf{R}^1 \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbf{R}^2$ [1]. Введем в множестве X топологическую структуру: объявим открытыми те множества в X, образы которых при проекции $p: X \to \mathbf{R}^1$ множества X на ось абсцисс открыты в $\mathbf{R}^1$. В этой топологии пространство X локально евклидово размерности 1, поскольку его можно покрыть двумя открытыми множествами, гомеоморфными числовой прямой: $X = \mathbf{R}^1 \cup (X \setminus \{(0, 0)\})$. В то же время пространство X не хаусдорфово: точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ не обладают в нем непересекающимися окрестностями. Действительно, пусть U и V — произвольные окрестности этих точек. Тогда $p(U)$ и $p(V)$ — окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^1$. Поскольку множества $p(U)$ и $p(V)$ заведомо имеют общие точки, отличные от 0, а прообраз любой такой точки должен содержаться в $U \cap V$, то и $U \cap V \neq \varnothing$.

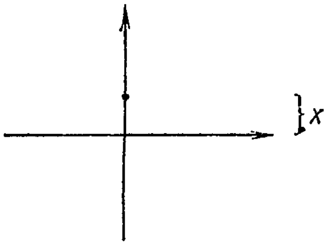

Рис. 22

В следующем основном определении нам будет удобно воспользоваться термином «евклидово множество»: открытое множество в n-мерном локально евклидовом пространстве назовем *евклидовым*, если оно гомеоморфно открытому множеству в полупространстве $\mathbf{R}^n_+$ (т. е. пересечению с $\mathbf{R}^n_+$ открытого множества в $\mathbf{R}^n$).

Основное определение. Топологическое пространство X называется *n-мерным топологическим многообразием*, если оно:

а) локально евклидово размерности n;

[1] Здесь $\mathbf{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$.

б) хаусдорфово;

в) обладает покрытием, состоящим из не более чем счетного числа евклидовых открытых множеств.

Условие в) означает, что пространство X не слишком велико. Часто его заменяют другими условиями: так называемыми сепарабельностью или второй аксиомой счетности. Условие в) автоматически выполнено, например, для компактных локально евклидовых пространств. Без доказательства отметим, что оно гарантирует метризуемость пространства X и даже вложимость его в евклидово пространство достаточно большой размерности.

В дальнейшем мы часто будем называть топологические многообразия просто *многообразиями.*

Примеры. 1. Всякое не более чем счетное дискретное пространство является нульмерным топологическим многообразием. В то же время несчетное дискретное пространство (например, множество вещественных чисел, наделенное дискретной топологией) топологическим многообразием не является. Для него выполнены условия а) и б) определения, но не выполнено условие в): всякое евклидово открытое множество в дискретном пространстве состоит из одной точки, и в силу несчетности пространства никакой счетный набор таких множеств покрытия не образует.

2. Пространство $\mathbf{R}^n$, полупространство $\mathbf{R}^n_+$, их открытые подмножества, сфера S^n, шар D^n — все являются n-мерными топологическими многообразиями. То, что они локально евклидовы, мы уже отмечали. Хаусдорфовость их очевидна. Наконец, что касается их евклидовых покрытий, то $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n_+$ и их открытые подмножества сами образуют одноэлементные такие покрытия, а сфера S^n и шар D^n могут быть покрыты двумя евклидовыми множествами: дополнениями «северного полюса» и «южного полюса» соответственно.

3. Открытое множество в n-мерном топологическом многообразии само является n-мерным топологическим многообразием.

Компоненты топологических многообразий. Поскольку всякое многообразие локально евклидово, то оно очевидным образом локально линейно связно. Теперь из теоремы 6 § 2, гл. II следует такой результат.

Теорема 1. а) *Компоненты топологического многообразия являются одновременно его линейно связными компонентами.*

б) *Компоненты n-мерного многообразия открыты в нем и, следоватгльно, являются n-мерными многообразиями.* □

Следующая теорема ограничивает возможное число компонент.

Теорема 2. *Многообразие X состоит из не более чем счетного числа компонент. Компактное многообразие имеет лишь конечное число компонент.*

Доказательство. По определению, X можно покрыть счетным числом евклидовых открытых множеств: $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Каждое из открытых множеств U_i, будучи евклидовым, имеет, самое большее, счетное число компонент (см. гл. II, § 2, второе следствие из теоремы 6). Поскольку объединение счетного числа не более чем счетных множеств счетно, то мы получаем, что X можно покрыть счетным числом связных множеств: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Далее, так как каждая компонента пространства X содержит по крайней мере одно из множеств A_j, причем разные компоненты, очевидно, содержат разные множества, то компонент не может быть больше, чем множеств A_j; т. е. число компонент не более чем счетно.

Пусть теперь многообразие X компактно. Поскольку его компоненты образуют, очевидно, открытое покрытие пространства X, то X можно, в силу компактности, покрыть конечным числом компонент. С другой стороны, в таком подпокрытии должны участвовать все компоненты. Следовательно, их число конечно. □

Информация без доказательства. Существуют связные (заведомо некомпактные) локально евклидовы хаусдорфовы пространства, не являющиеся многообразиями (они не допускают счетного покрытия открытыми евклидовыми множествами).

Инвариантность размерности многообразия. Остановимся подробнее на понятии *размерности* многообразия. Вполне осмысленным является вопрос: *может ли многообразие размерности n быть одновре-*

менно многообразием размерности m при $m \neq n$? Ответ на него отрицательный. Таким образом, размерность многообразия является его топологическим инвариантом. Для доказательства надо заметить, что в противном случае мы нашли бы у некоторой точки многообразия окрестность, гомеоморфную одновременно открытому множеству в $\mathbf{R}^m$ и открытому множеству в $\mathbf{R}^n$. Это невозможно в силу следующей теоремы Брауэра, которую также называют «теоремой об инвариантности области». Она утверждает, что свойство множества в евклидовом пространстве быть областью топологически инвариантно, другими словами — это топологическое свойство.

Теорема 3 (Брауэра об инвариантности области). *Если множества A и B в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфны и множество A открыто, то и множество B открыто.*

Следствие. *Евклидовы пространства разных размерностей негомеоморфны: если $m \neq n$, то $\mathbf{R}^m \not\approx \mathbf{R}^n$.*

Теорема Брауэра бессодержательна при $n = 0$ и несложно доказывается при $n = 1$. Уже при $n = 2$, а тем более при $n \geqslant 3$ ее доказательство представляет значительные трудности, хотя и может быть сделано совершенно элементарным.

Доказательство следствия. Пусть, для определенности, $m < n$. Положим, в условиях теоремы 3, $A = \mathbf{R}^n$ и $B = \mathbf{R}^m$. Тогда теорема 3 утверждает, что $\mathbf{R}^m$ открыто в $\mathbf{R}^n$ (?!). □

Край топологического многообразия. Точка x_0 в n-мерном многообразии называется *внутренней*, если она обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbf{R}^n$ (не путать с внутренними точками множества в топологическом пространстве!). Точка x_0 называется *краевой*, если у нее существует окрестность U, гомеоморфная полупространству $\mathbf{R}^n_+$, причем связывающий их гомеоморфизм $f\colon U \to \mathbf{R}^n_+$ переводит точку x_0 на границу полупространства $\mathbf{R}^n_+$ (ср. рис. 21). Краевые точки многообразия X образуют его *край*, который обозначается через ∂X. Многообразия, все точки которых являются внутренними, называются *многообразиями без края*, а многообразия, у которых есть краевые точки, называются *многообразиями с краем*. Многообразие без края называется *замкнутым*, если оно компактно, и называется *открытым*, если у него нет компактных компонент.

Примеры. 1. Все точки в $\mathbf{R}^n$ и S^n являются внутренними. В $\mathbf{R}^n_+$ и D^n точки, не лежащие на границе, являются внутренними, а точки, лежащие на границе — краевыми. Таким образом, $\mathbf{R}^n$ и S^n — многообразия без края, причем S^n — замкнутое, а $\mathbf{R}^n$ — открытое, а $\mathbf{R}^n_+$ и D^n — многообразия с краем.

2. Примерами двумерных многообразий без края являются поверхности в $\mathbf{R}^n$: кроме сферы это тор, *крендель* (все это замкнутые многообразия), однополостный и двуполостный гиперболоиды (это открытые многообразия) и т. п. (рис. 23).

Особо стоит отметить выпуклые многогранные поверхности, такие как куб, призма, пирамида и т. д. Все они гомеоморфны сфере и тем самым являются замкнутыми двумерными многообразиями (рис. 24).

3. Примерами двумерных многообразий с краем служат: а) замыкания различных плоских областей: кроме круга это кольцо, круг с дырами и т. п. (рис. 25); б) замыкания различных открытых множеств в двумерных многообразиях без края: «сфера с дырами», «тор с дырами», «крендель с дырой» и т. п. (рис. 26).

4. Интересным примером двумерного многообразия с краем в $\mathbf{R}^3$ является так называемый *лист Мёбиуса*. Он выглядит как результат склеивания концов перекрученной полоски бумаги (рис. 27). Лист Мёбиуса — простейшая *односторонняя* поверхность. Что это значит? Обычно у поверхности две стороны: вы можете покрасить одну сторону, скажем, в синий цвет, а другую — в красный, так, что цвета нигде не будут граничить друг с другом. Начав же красить с любого места лист Мёбиуса, вы непременно закрасите его целиком — «со всех сторон»! Две стороны исходной полоски бумаги отождествились при склеивании.

Инвариантность края многообразия. Наше определение внутренних и краевых точек может вызвать резонный вопрос: не *может ли внутренняя точка многообразия одновременно являться краевой*? (Другими словами, не может ли многообразие без края иметь непустой край?) Он сводится к вопросу о том, существует ли у точки, лежащей на границе

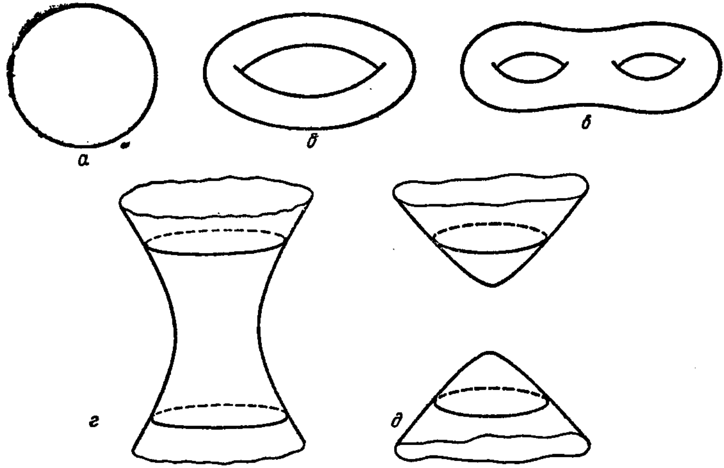

Рис. 23

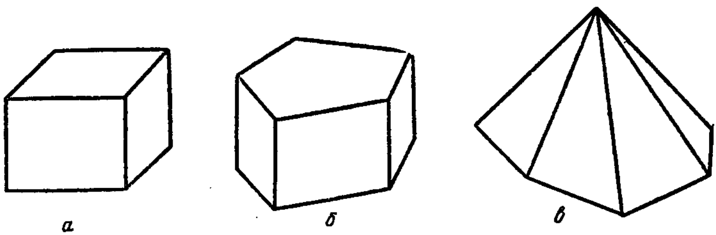

Рис. 24

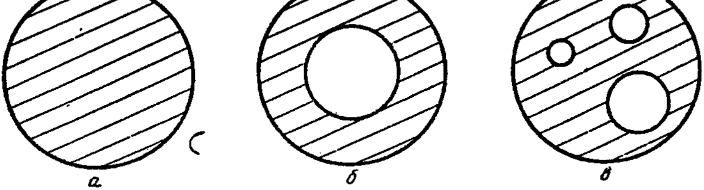

Рис. 25

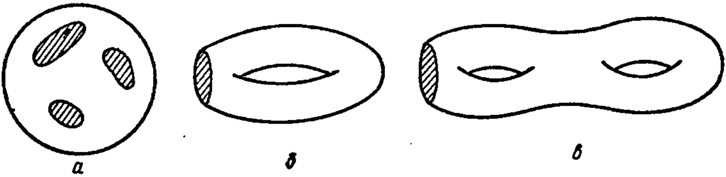

Рис. 26

полупространства $\mathbf{R}^n_+$, окрестность в $\mathbf{R}^n_+$, гомеоморфная евклидову пространству $\mathbf{R}^n$. Ответ на этот вопрос отрицательный, как легко следует из теоремы Браэура об инвариантности области. В частности, край замкнутого полупространства совпадает с граничной гиперплоскостью: $\partial\mathbf{R}^n_+ \cong \mathbf{R}^{n-1}$. Из этого следует, что *край n-мерного многообразия с краем сам является $(n-1)$-мерным многообразием без края.* (Без обращения к теореме Брауэра легко показать, что имеются только две возможности: $\partial\mathbf{R}^n_+ \cong \mathbf{R}^{n-1}$ или $\partial\mathbf{R}^n_+ = \mathbf{R}^n_+$. Во втором случае край любого n-мерного многообразия с ним совпадал бы.)

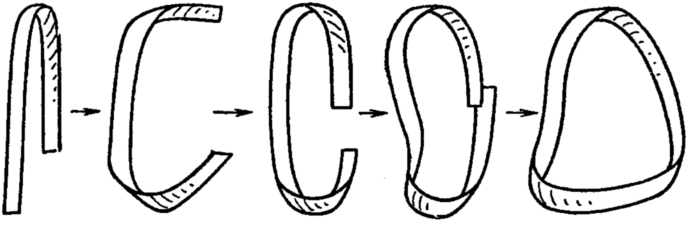

Рис. 27

Примеры. 1. Край отрезка состоит из двух точек — его концов: $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$.

2. Край круга есть окружность: $\partial D^2 = S^1$.

3. Более общим образом, край n-мерного шара есть $(n-1)$-мерная сфера.

4. Край листа Мёбиуса гомеоморфен окружности S^1.

5. Тор является краем ограниченной им части пространства — *полнотория.*